

## ARITMÉTICA

Lic. Jose Capcha Rivera  
Mg.J.Daniel Torres Soplin  
Mg. Ronald Cuevas Huayta  
Lic. Leidy Julissa Córdova Girón

### PRIMERA UNIDAD

#### SEMANA 01 DE ARITMÉTICA

#### LÓGICA PROPOSICIONAL

Lógica es el estudio del razonamiento; se refiere específicamente a que si el razonamiento es correcto.

##### **Elementos de la lógica simbólica**

**Enunciado:** Se denomina enunciado a toda frase u oración.

**Enunciados abiertos (E.A.):** Es aquel enunciado que presenta variables y que en sí mismo no es ni verdadero ni falso, pero que al asignarle un valor a aquellas, resulta ser verdadero o falso, pero no ambos.

**Enunciados cerrado (E.C.):** Es toda definición, por lo que su valor de verdad es siempre verdadero, pues así se ha convenido.

##### **Proposiciones lógicas**

Es aquel enunciado en el que se afirma algo y se le puede asignar solamente uno de los valores de verdad (verdadero o falso).

Las proposiciones lógicas se denotan con las letras minúsculas del alfabeto: p, q, r, s, t, etc. A estas se les denomina variables proposicionales.

##### **Clases de proposiciones lógicas:**

**Proposiciones simples o atómicas:** Son aquellas que están compuestas de una sola proposición, además, carecen de conjunciones gramaticales y del adverbio de negación no. Ejemplos:

- Voy a estudiar aritmética.
- Luis esta jugando fútbol.

**Proposiciones compuestas o moleculares:** Son aquellas que están compuestas de dos o más proposiciones, relacionadas entre sí por conjunciones gramaticales o afectadas por el adverbio de negación no.

Ejemplos:

- Eder es matemático y Jhonatan es físico.
- Pedro no va al cine.

##### **Conectivos lógicos**

Son aquellos términos o conectores que sirven para enlazar una o más proposiciones y así formar otras más complejas.

Son expresiones que sirven para unir dos o más proposiciones. Entre los más importantes conectivos lógicos tenemos:

NOMBRE	EXPRESION	SIMBOLO LOGICO
Negación	No	~
Conjunción	Y	∧
Disyunción	O	∨
Condicional Implicación	Si, entonces, ...	→
Bicondicional, Doble implicación	... si y solo si,....	↔ ≡
Disyunción exclusiva	O....O....	Δ

##### **Tabla de los conectivos lógicos.**

Negación:

p	~p
V	F
F	V

Conjunción:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional:

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional:

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

#### TIPOS DE PROPOSICIONES

**Tautologías:** Son proposiciones compuestas que siempre son verdaderas cualquiera que sea el valor de las proposiciones componentes.

p	q	$\sim p$	$\Rightarrow$	q	$\vee$	$\sim$	$(p \wedge q)$
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V	F

→ Tautología

**Contradicciones:** Son proposiciones compuestas que siempre son falsas cualquiera que sea el valor de las proposiciones componentes.

p	q	$\sim$	$(\sim p \wedge q)$	$\Delta$	$(\sim q \vee p)$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V

→ Contradicción

**Contingencias:** Son aquellos términos o conectores que sirven para enlazar una o más proposiciones y así formar otras más complejas.

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$	$\vee$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V

**LEYES LÓGICAS**

1. Idempotencia $p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	2. Conmutativa $p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3. Asociativa $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	4. Distributiva $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. Absorción $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$	6. De Morgan $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
7. Del complemento $\sim(\sim p) \equiv p$ $p \vee \sim p \equiv V$ $p \wedge \sim p \equiv F$	8. De la identidad $p \vee V \equiv V$ $p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$ $p \wedge F \equiv F$
9. De la condicional $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	10. De la bicondicional $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

**Formas normales para la conjunción y disyunción:**

<b>F.N Conjuntiva</b>	<b>F.N Disyuntiva</b>
$V \wedge V \equiv V$	$V \vee F \equiv F$
$V \wedge P \equiv P$	$V \vee P \equiv P$
$F \wedge P \equiv F$	$V \vee P \equiv V$

También:

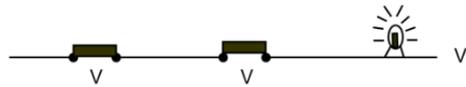
$P \wedge F \equiv F$        $F \vee V \equiv V$        $P \vee V \equiv V$

**CIRCUITOS CONMUTADORES**

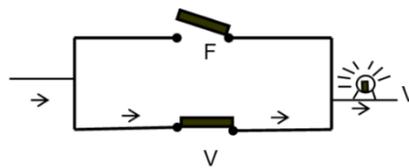
Cuando se prende la luz se ha cerrado el conmutador (estado cerrado, que se simboliza por "V" o "1"

Cuando se apaga la luz se ha abierto el conmutador (estado abierto), que se simboliza por "F" o "0"

**Circuitos en serie:** Un circuito con dos conmutadores p y q conectados en serie se relaciona con la proposición conjunción " $p \wedge q$ "



**Circuitos en paralelo:** Un circuito con dos conmutadores p y q conectados en paralelo se relaciona con la proposición " $p \vee q$ "



**EJEMPLOS**

1. Si la proposición:  $(p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$  es falsa, halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I.  $\sim(p \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$
- II.  $(p \vee \sim r) \Rightarrow (\sim r \wedge q)$
- III.  $[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow (p \vee \sim r)$



**Resolución:**

El circuito se puede representar por:

$$q \wedge [(q \vee \sim p) \vee (\sim q \vee p)] \wedge \sim p$$

$$q \wedge \{[(q \vee \sim p) \vee \sim q] \vee p\} \wedge \sim p$$

$$(\sim p \wedge q) \wedge \{[(q \vee \sim q) \vee \sim p] \vee p\}$$

$$(\sim p \wedge q) \wedge \{V \vee \sim p\} \vee p$$

$$(\sim p \wedge q) \wedge [V \vee p]$$

$$(\sim p \wedge q) \wedge V \equiv \sim p \wedge q$$

$$\therefore q \wedge [(q \vee \sim p) \vee (\sim q \vee p)] \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge q$$

**TRABAJANDO EN CLASES**

1. Halla los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

I.-  $(2 + 5 = 7) \vee (3 - 1 = 4)$   
 II.-  $(3 + 5 = 8) \wedge (4 + 2 = 7)$   
 III.-  $(4 - 0 = 0) \rightarrow (6 - 4 > 1)$   
 IV.-  $(5 + 4 < 9) \leftrightarrow (2 + 5 = 8)$

- A) VFFV    B) FVVF    C) VFVF  
 D) FFVV    **E) VFVV**

2. Dado el conjunto:  $A = \{3; 4; 5; 6\}$ ; Halla los valores de verdad de cada proposición.

I.-  $\forall x \in A: x + 3 > 4$   
 II.-  $\exists x \in A/x - 5 > 1$   
 III.-  $\forall x \in A: x^2 - 15 > 0$

- A) VVF    B) FFF    C) FVF  
**D) VFF**    E) VFV

3. Simbolice correctamente: no estudie para el examen final porque trabaje hasta tarde; ya que llegaron muchos clientes:

A)  $p \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$   
 B)  $\sim p \rightarrow (\sim q \wedge r)$   
 C)  $p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)$   
**D)  $r \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$**   
 E)  $p \rightarrow (\sim r \rightarrow q)$

4. Construir una tabla de verdad para:  $p \wedge [(\sim p) \wedge (\sim q)]$  e indica de qué se trata:

- A) Tautología    **B) Contradicción**  
 C) Composición    D) Contingencia  
 E) Equipotencia

5. Si el siguiente esquema molecular es falso:  $\sim s \rightarrow \{ [ s \Delta (\sim q \wedge r) ] \rightarrow [\sim s \leftrightarrow \sim (\sim p \rightarrow q)] \}$

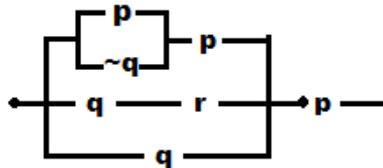
Determina los valores de p, q, r y s, respectivamente.

- A) VVVF    B) VFVV    C) FFVF  
**D) VFVF**    E) FVVF

6. Construye la tabla de verdad e indica el número de valores falsos en la matriz principal del siguiente esquema molecular:  $\sim \{ \sim [ (\sim p \Delta q) \rightarrow \sim r ] \wedge (r \vee \sim q) \} \wedge p$

- A) 4    **B) 5**    C) 6    D) 7    E) 8

7. Simplificar el circuito:



A)  $\leftarrow p - r \rightarrow$

**B)  $\leftarrow p \rightarrow$**

C)  $\leftarrow r \rightarrow$

D)  $\leftarrow \begin{array}{c} p - r \\ q \end{array} \rightarrow$

E)  $\leftarrow p - \sim q \rightarrow$

8. Construir la tabla de verdad de la siguiente proposición compuesta:  $(\sim p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)$  y dar el resultado.

- A) FFVV    B) FVVV    **C) FVVF**  
 D) VVVF    E) VVFF

9. Al construir la tabla de verdad de:  $(p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge \sim q)$ . El número de valores verdaderos en el resultado es:

A) 0 B) 1 **C) 2** D) 3 E) 410. Simplificar:  $\sim p \vee \sim(p \wedge q)$ 

- A)  $p \wedge q$  B)  $\sim p \wedge q$   
 C)  **$\sim(p \wedge q)$**  D)  $\sim(p \vee q)$   
 E)  $p \wedge \sim q$

**ASUME EL RETO**

11. Sean las proposiciones:

p: Arequipa es la capital de Perú

q:  $\sqrt{2}(2^{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}) = \sqrt[3]{8}$

Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I.  $\sim(p \Delta \sim q) \leftrightarrow \sim p$   
 II.  $\sim[\sim(\sim p \Delta \sim q) \rightarrow p]$   
 III.  $[p \Delta (q \rightarrow \sim p)] \leftrightarrow (\sim q \wedge p)$

- A) VVF B) VFV C) VVV  
 D) FVF **E) VFF**

12. De los siguientes enunciados, ¿cuáles son proposiciones lógicas?

- I. Cesar Vallejo nació en París.  
 II. Ojalá apruebe el examen.  
 III. Luis es médico o estudia arquitectura.  
 IV. Homero es autor de la Iliada o es autor de Hamlet.  
 V. Debes obedecer a tus padres.

A) I, II, III y IV B) II, IV y V **C) I, III y IV**

D) I, III, IV y V E) Todas

13. Sabiendo que:  $(r \rightarrow q) \vee \sim p$  es falsa, halla los valores de verdad de:

- I.-  $(p \wedge r) \rightarrow (\sim q \vee t)$   
 II.  $\sim(\sim p \vee q) \vee (r \rightarrow q)$

- A) VV** B) VF C) FV  
 D) FF E) Contradicción

14. Determina el resultado de evaluar el siguiente esquema molecular lógico:

$\sim p \wedge \sim(p \rightarrow \sim q)$

- A) tautología  
 B) Contingencia  
**C) Contradicción**  
 D) Hay 7 Falsos y 1 verdadero  
 E) hay 7 verdaderos y 1 falso

15. Si la proposición compuesta:

 $(p \rightarrow q) \vee (\sim p \vee r)$  es falsa, indicar los valores de verdad de cada proposición (p,q,r).

- A) p= F, q = F, r = v  
 B) p= v, q = F, r = v  
 C) p= F, q = F, r = F  
**D) p= v, q = F, r = F**  
 E) p= v, q = v, r = v

**SEMANA 02: DE ARITMÉTICA****TEORÍA DE CONJUNTOS****❖ DEFINICIÓN**

Es la agrupación, reunión o colección de objetos reales o ideales, a las cuales se les denomina elementos del conjunto.

A los conjuntos generalmente se les representa con letras mayúsculas de nuestro alfabeto y a sus elementos separados por comas y encerrados por signos de agrupación (llaves, corchetes, etc.)

**❖ RELACIÓN DE PERTENENCIA**

Si un objeto es elemento de un conjunto se dice que pertenece ( $\in$ ) a este conjunto, en caso contrario se dirá que no pertenece ( $\notin$ ) a dicho conjunto. La relación de pertenencia es una relación exclusiva de elemento a conjunto.

**❖ DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO**

Determinar un conjunto es especificar o señalar en forma precisa, quienes son los elementos que los conforman.

**❖ POR COMPRESIÓN O EN FORMA CONSTRUCTIVA**

Es cuando se mencionan una o más características comunes y exclusivas de los elementos del conjunto.

A = {x/x es una vocal}

B = {x/x es un número cuadrado perfecto mayor que uno y menor que 37}

**❖ POR EXTENSIÓN O EN FORMA TABULAR**

Es cuando se señala a cada uno de sus elementos del conjunto, enumerándolos o indicándolos en forma sobreentendida.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\}$$

### ❖ NÚMERO CARDINAL

El número cardinal de un conjunto "A" nos indica la cantidad de elementos diferentes que posee el conjunto y se denota por "n(A)".

### ❖ RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

#### • INCLUSIÓN

Se dice que un conjunto A está incluido en el conjunto B, si solo si todos los elementos de "A" son también elementos del conjunto B.

Se denota:  $A \subset B$

Diagrama:



Se define:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

#### • IGUALDAD

Intuitivamente dos conjuntos A y B son iguales, cuando estos conjuntos poseen los mismos elementos.

Se denota:  $A = B$

Se lee: El conjunto A es igual al conjunto B

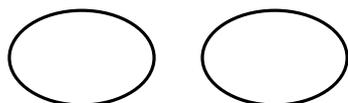
Se define:

$$A = B \Leftrightarrow (B \subset A) \wedge (A \subset B)$$

#### • DISJUNTOS

Dos conjuntos son disjuntos cuando no poseen elementos comunes.

Diagrama:



M y N son

### ❖ DIAGRAMA DE CARROL

Se utiliza para representar conjuntos que son disjuntos.

	Solteros	Casados	TOTAL
Hombres	1	2	3
Mujeres	4	3	7
TOTAL	5	5	10

### ❖ CLASES DE CONJUNTOS

#### • FINITO

Un conjunto es finito, si posee una cantidad limitada de elementos diferentes, es decir, el proceso de contar sus elementos tiene en el tiempo.

$$A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 100\}$$

#### • INFINITO

Un conjunto es infinito, si tiene una cantidad ilimitada de elementos diferentes, es decir, el proceso de contar sus elementos no tienen fin en el tiempo.

$$A = \{x/x \text{ es un átomo en el espacio}\}$$

### ❖ CONJUNTOS ESPECIALES

#### • CONJUNTOS VACÍO O NULO

Es aquel conjunto que no posee elementos, la cual se denota por: " $\phi$ " ó  $\{\}$

$$A = \{x/x \text{ es un número par} \wedge 8 < x < 10\}$$

$$\rightarrow A = \phi$$

#### • CONJUNTO UNITARIO O SINGLETÓN

Es aquel conjunto que sólo posee un elemento.

$$S = \{x/x \in \mathbb{Z}, 2 < x < 4\} = \{3\}$$

$$\rightarrow n(S) = 1 \therefore S \text{ es un conjunto unitario.}$$

#### • CONJUNTO UNIVERSAL

Es un conjunto referencial que se toma para el estudio de otros conjuntos incluidos en él. No existe conjunto universal absoluto y se denota generalmente con la letra "U".

Para los conjuntos:

$$A = \{\text{los gatos}\} \text{ y } B = \{\text{los tigres}\}$$

Los posibles conjuntos considerados que contiene a los conjuntos anteriores son:

$$U_1 = \{\text{los animales}\} \quad U_2 = \{\text{los felinos}\}$$

$$U_3 = \{\text{los mamíferos}\}$$

• **CONJUNTO POTENCIA**

Dado un conjunto “A”, el conjunto potencia de “A” es la familia de subconjuntos de A y se denota como P(A).

$$P(A) = \{x/x \subset A\}$$

Dado el conjunto:

$$B = \{a, b, c\} \Rightarrow n(B) = 3$$

Subconjunto de B:

$$B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \phi\}$$

Números de subconjuntos

$$\# \text{ subconjunto de } A = n(P(A)) = 2^{n(A)}$$

Se denomina subconjuntos propio de “A” a todo subconjunto de A y diferente de A.

$$\# \text{ subconjunto propio de } A = 2^{n(A)} - 1$$

Números de subconjuntos k-arios

$$\# \text{ subconjunto k - arios de } A = C_k^{n(A)}$$

$$C_k^{n(A)} = \frac{n(A)!}{[n(A) - k]! \cdot k!}$$

❖ **OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS**

• **UNIÓN O REUNIÓN**

La unión de dos conjuntos “A” y “B” es el conjunto

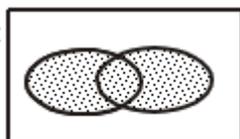
Se denota  $A \cup B$

Se lee A o B

Se define:

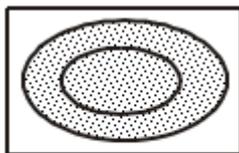
$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

Diagrama:

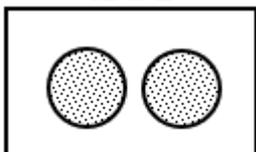


$A \cup B$

Diagrama:



$A \cup B$



$A \cup B$

Diagrama:

Si A y B son disjuntos  $\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

• **INTERSECCIÓN**

La intersección de dos conjuntos “A” y “B” es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos a la vez.

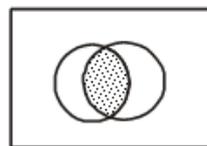
Se denota  $A \cap B$

Se lee “A y B”

Se define:

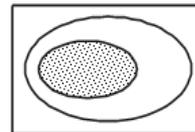
$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Diagrama:



$A \cap B$

Diagrama:



$A \cap B$

Dado que  $B \subset B \rightarrow B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$

Diagrama:



$A \cap B = \phi$

• **DIFERENCIA**

La diferencia de dos conjuntos “A” y “B” (en dicho orden) es el conjunto formado por los elementos de “A” pero no de “B”.

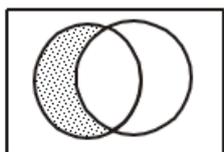
Se denota  $A - B$

Se lee “A” pero no de “B”

Se define:

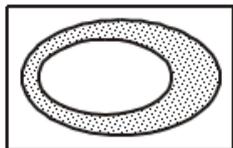
$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Diagrama:



A - B

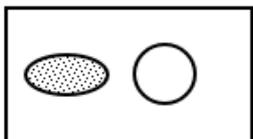
Diagrama:



A - B

Si:  $B \subset A \Rightarrow B - A = \phi$

Diagrama:



A - B = A

A y B disjuntos

• **DIFERENCIA SIMÉTRICA**

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a "A" o "B" pero no a ambos.

Se denota  $A \Delta B$

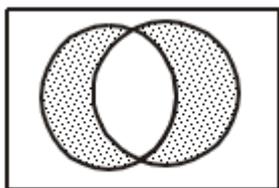
Se lee: "A o B"

o bien A o bien B.

Se define:

$$A \Delta B = \{x / x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

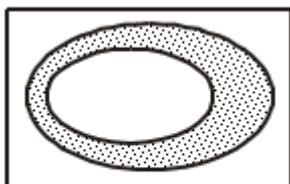
Diagrama:



A Δ B

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

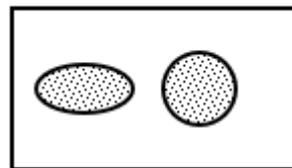
Diagrama:



A Δ B

Si:  $(B \subset A) \Rightarrow (A \Delta B) = (A - B)$

Diagrama:



A Δ B

Si A y B son disjuntos:  $A \Delta B = A \cup B$

• **COMPLEMENTO**

El complemento de un conjunto "A" es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto universal "U" pero no a "A".

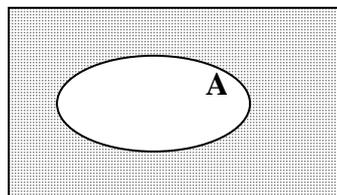
Se denota  $C_A, \bar{A}, A^c, A'$

Se lee: "no A"

Se define:

$$A' = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$$

Diagrama:



A<sup>c</sup>

**EJEMPLOS**

1. Sea el conjunto:  $Q = \{a; \{a\}; \{b\}; \{a; \{b\}\}$   
 Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $\{a\} \in Q$       ▪  $\{\{b\}; \{a; \{b\}\}\} \subset Q$       ▪  $b \in Q$
- $\{b\} \subset Q$       ▪  $\{\{a\}; \{b\}\} \in Q$       ▪  $\{\{a; \{b\}\}\} \subset Q$

**Resolución:**

- $\{a\} \in Q$  (verdadero)  
 $\{a\}$  es un elemento del conjunto Q.
- $\{b\} \subset Q$  (falso)  
 $\{b\}$  es un elemento del conjunto Q. La relación correcta es:  $\{b\} \in Q$

- $\{\{b\}; \{a; \{b\}\}\} \subset Q$  (verdadero)  
 $\{b\}$  y  $\{a; \{b\}\}$  son elementos de  $Q$ , entonces el conjunto formado por estos dos elementos es un subconjunto de  $Q$ .
- $\{\{a\}; \{b\}\} \in Q$  (falso)  
 $\{\{a\}; \{b\}\}$  no es un elemento de  $Q$ .
- $b \in Q$  (falso)  $b$  no es un elemento de  $Q$ .
- $\{\{a; \{b\}\}\} \subset Q$  (verdadero)  
 $\{a; \{b\}\}$  es un elemento de  $Q$ , entonces,  $\{\{a; \{b\}\}\}$  es un subconjunto de  $Q$ .

2. Sean:

$$A = \{3n - 8; 44\}$$

$$B = \{10; m^n - 20\}$$

Además:  $A \subset B \wedge B \subset A$

Calcula:  $n^m$

**Resolución:**

Como:  $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$

Luego:

$$\begin{aligned} \bullet 3n - 8 &= 10 \\ 3n &= 18 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet m^n - 20 &= 44 \\ m^n &= 64 \\ m^6 &= 2^6 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

**Nos piden:  $n^m = 6^2 = 36$**

3. La suma del número de subconjuntos de  $A$  con el número de subconjuntos de  $B$  es igual a 40. Halla la diferencia entre el número de subconjuntos propios de estos dos conjuntos

**Resolución:**

Sean  $A$  y  $B$  los conjuntos.

$$n[P(A)] = 2^{n(A)}$$

$$n[P(B)] = 2^{n(B)}$$

$$n[P(A)] + n[P(B)] = 2^{n(A)} + 2^{n(B)} \quad \dots(1)$$

$$\text{Dato: } n[P(A)] + n[P(B)] = 40 \quad \dots(2)$$

Reemplazamos (2) en (1):

$$\Rightarrow 2^{n(A)} + 2^{n(B)} = 40$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 32 & 8 \\ 2^5 & 2^3 \end{array}$$

Nos piden la diferencia de los subconjuntos propios:

$$n.^{\circ} \text{ subconjuntos propios de } A = 2^{n(A)} - 1 = 31$$

$$n.^{\circ} \text{ subconjuntos propios de } B = 2^{n(B)} - 1 = 7$$

$$\therefore 31 - 7 = 24$$

4. Pedro vende ensalada de frutas, para lo cual utiliza  $n$  frutas diferentes, ¿cuántos platos diferentes puede obtener si en cada plato utiliza al menos dos frutas diferentes?

**Resolución:**

Sea  $A$  el conjunto formado por las frutas diferentes:

$$A = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n\} \Rightarrow n(A) = n$$

El número de platos diferentes que se puede obtener es igual al número de sus subconjuntos propios de  $A$ :

$$2^{n(A)} - 1 = 2^n - 1 \quad \dots(1)$$

Piden: el número de platos que se puede obtener si se utiliza al menos dos frutas diferentes.

De (1), sacamos los subconjuntos unitarios que son  $n$  elementos, entonces:

$$(2^n - 1) - n = 2^n - n - 1$$

Por lo tanto, se pueden obtener  $(2^n - n - 1)$  platos diferentes.

5. Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos cualesquiera. Simplifica:  $(A \cup B) \cap \{(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\}^c$

**Resolución:**

$$\begin{aligned}
 & (A \cup B) \cap \{(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\}^c \\
 & (A \cup B) \cap \{((A \cap B^c) \cup A^c) \cap ((A \cap B^c) \cup B)\}^c \\
 & (A \cup B) \cap \{(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)\} \cap \{(A \cup B) \cap (B^c \cup B)\}^c \\
 & (A \cup B) \cap \{(U \cap (B \cap A)^c) \cap ((A \cup B) \cap U)\}^c \\
 & (A \cup B) \cap \{(B \cap A)^c \cap (A \cup B)\}^c \\
 & (A \cup B) \cap \{(B \cap A) \cup (A \cup B)^c\} \\
 & \underbrace{(A \cup B) \cap (B \cap A)}_{B \cap A} \cup \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup B)^c}_{\emptyset} \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{A \cap B}
 \end{aligned}$$

**TRABAJANDO EN CLASES**

- Si:  $P = \{3; \{7\}; \{9; 10\}; \{4\}; 2; 4\}$ .  
Indique que alternativa es incorrecta:  
i.  $2 \in P$   
ii.  $\{2\} \subset P$   
iii.  $\{9; 10\} \subset P$   
iv.  $\{\{4\}\} \subset P$   
v.  $\emptyset \subset P$   
**A) iii**      B) i      C) ii  
D) i y ii      E) ii y iii
- Determine el conjunto A por comprensión:  
 $A = \{3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17\}$   
A)  $A = \{x/x \in \mathbb{N}; 3 \leq x \leq 17\}$   
B)  $A = \{x/x \in \mathbb{N}; 3 \leq 2x - 1 \leq 17\}$   
C)  $A = \{2x + 1/x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 8\}$   
**D)  $A = \{2x - 1/x \in \mathbb{N}; 2 \leq x \leq 9\}$**   
E)  $A = \{2x + 1/x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 8\}$
- Dados los conjuntos:  $A = \{(n - 2) \cdot (n - 1) / n \in \mathbb{Z}; 0 < n \leq 4\}$ ,  $B = \{(2n) \in \mathbb{Z} / 1 < x \leq 6\}$ . Calcular  $n(A) + n(B)$   
A) 10    B) 11    **C) 12**    D) 13    E) 14
- Dado el conjunto  $M = \{x/x \in \mathbb{N}, 7 < x \leq 12\}$ , ¿cuántos elementos tiene su conjunto potencia?  
A) 4    B) 16    C) 8    **D) 32**    E) 2
- Si  $n(P) = 15$  y  $n(Q) = 22$  y  $n(P \cup Q) = 30$ , calcula  $n[P \cap Q]$ .  
A) 6    **B) 7**    C) 8    D) 9    E) 10
- Si  $n[P(A)] = 64$ ;  $n[P(B)] = 128$ ;  $n[P(A \cap B)] = 16$ ; calcula  $n[P(A \cup B)]$   
A) 64    B) 128    **C) 512**    D) 256    E) 32
- Si el conjunto "C" tiene  $(P + 1)$  elementos y  $(2P + 3)$  subconjuntos propios; además:  
 $n(A) = 4P + 2$  ;  $n(B) = 3P + 6$  y  $n(A \cap B) = 2P - 2$   
Halle  $n(A \Delta B)$   
A) 14    B) 16    **C) 18**  
D) 17    E) 20
- En un aula de clases:  
❖ 40 alumnos tienen el libro de aritmética, 30 de física y 30 el de geometría.

- ❖ A 12 de ellos les falta solo el libro de física a 8 solo el de geometría y a 6 solo el de aritmética.
- ❖ 5 tienen los tres libros y 6 no tienen estos libros. ¿Cuántos alumnos hay en el aula?  
A) 20    **B) 70**    C) 30    D) 110  
E) 170

- Se sabe que A tiene 127 subconjuntos propios, y que el número de elementos de la intersección de A y B es 5 y que  $B - A$  tiene 16 subconjuntos. Determina el número de subconjuntos de  $A \cup B$ .  
A) 1024    B) 512    C) 1048  
**D) 2048**    E) 4096

- De 34 científicos, 12 son físicos, 15 son químicos y 14 biólogos; 5 son físicos y químicos, 4 son químicos y biológicos, 6 son físicos y biólogos y solo 1 es físicos, químicos y biólogo. ¿cuántos no son físicos, ni químicos ni biólogos?  
**A) 7**    B) 8    C) 6    D) 9    E) 5

**ASUME EL RETO**

- De un total de 51 personas 30 gustan del cine y 18 sólo del cine, 22 del teatro. ¿A cuántos no les gusta ni el cine ni el teatro?  
**A) 11**    B) 12    C) 13    D) 20    E) 34
- De un grupo de 70 personas: 32 hablan inglés; 26 español; 37 francés, 6 inglés y español; 9 español y francés; 12 inglés y francés. ¿Cuántos hablan sólo un idioma? Si hay 2 personas que hablan los 3 idiomas.  
A) 21    B) 32    C) 35    D) 39    **E) 47**
- En un club, todos son deportistas: 58 practican fútbol, 35 básquet y 40 tenis. Si el total de deportistas es 76 y 10 de ellos practican los tres deportes, ¿cuántos practican solo dos deportes?  
A) 39    B) 33    C) 31    D) 32    **E) 37**
- Si los conjuntos P y Q son iguales:  $P = \{a^2 + 2a; b^3 - b\}$  y  $Q = \{15; 2a\}$ . Halla "a.b", siendo a y b naturales.  
A) 3    B) 4    C) 5    **D) 6**    E) 7









**ASUME EL RETO**

1. Calcule “a” si:

$$\overline{a\left(\frac{p}{3}\right)_n} = \overline{(2c + 1)aa}_{(7)}$$

Además  $\overline{5p7}_{(n)} = \overline{\left(\frac{c}{2}\right)4c3}_{(p)}$

- A) 2      **B) 3**      C) 4      D) 5      E) 6

2. Calcula el valor de “a”, si se cumple:

$$\overline{aaa}_4 = \overline{132}_5$$

- A) 1 B) 0      **C) 2**      D) 3      E) 4

3. Calcula el valor de “a + b + c” si se sabe que  $\overline{234}_5 = \overline{abc}_7$

- A) 8      **B) 9**      C) 6      D) 7      E) 10

4. Calcula el valor de “a + b + c”, si se sabe que  $\overline{6a2}_c = \overline{4cb}_8$

- A) 12      B) 13      **C) 15**      D) 16      E) 18

5. A un número de tres cifras se le suma una unidad a cada una de sus cifras y queda expresado en el sistema heptanario. Calcule la suma de todos los números de tres cifras diferentes que se pueden formar con las cifras del mayor número inicial.

- A) 1234      B) 1572      C) 1846  
D) 1667      **E) 1776**

**SEMANA 04 DE ARITMÉTICA**

**RAZONES Y PROPORCIONES**

**RAZÓN**

Es la comparación matemática de dos cantidades. La razón que estudiaremos es mediante la resta y la división.

Razón Aritmética	Razón Geométrica
------------------	------------------

$a - b = r$	$\frac{a}{b} = k$
-------------	-------------------

**OBSERVACIÓN**

Cuando se menciona simplemente la razón de dos cantidades consideramos la razón geométrica.

**NOTACIÓN**

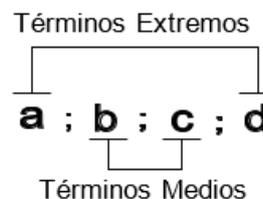
- a → antecedente
- b → consecuente
- r → valor de la razón aritmética
- k → valor de la razón geométrica

**PROPORCIÓN**

Proporción Aritmética	Proporción Geométrica
$a - b = c - d$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

**NOTACIÓN**

- a y c → antecedentes
- b y d → consecuentes
- a y b → términos de la primera razón
- c y d → términos de la segunda razón



**TIPOS**

	Proporción Aritmética	Proporción Geométrica
DISCRETA	$a - b = c - d$ $(b \neq c)$ $\Rightarrow a + d = b + c$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(b \neq c)$ $\Rightarrow a.d = b.c$
CONTINUA	$a - b = b - c$ $\Rightarrow b = \frac{a + c}{2}$	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

I N U A	$\Rightarrow b = \sqrt{ac}$
------------------	-----------------------------

**EJEMPLOS**

1. Se tienen 3 números que son proporcionales a 3; 5 y 9. Si el tercer número excede al primero en 42, halla la suma de dichos números.

**Resolución:**

Del enunciado:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{9} = k$$

$$\Rightarrow a = 3k, b = 5k \text{ y } c = 9k$$

Además:

$$c - a = 42$$

$$9k - 3k = 42$$

$$6k = 42 \Rightarrow k = 7$$

$$\therefore a + b + c = 17k = 17(7) = \mathbf{119}$$

2. Si "H" es la media proporcional de 8 y 18. Hallar el valor de "H"

**Resolución:**

$$\frac{8}{b} = \frac{b}{18} \rightarrow b^2 = 144 \rightarrow b = 12$$

3. La suma de los términos de una proporción aritmética continua es 100; si el producto de los 4 términos es 375 000, hallar la diferencia de los extremos de la proporción

**Resolución:**

Sea la proporción aritmética continua:

$$a - b = b - c$$

Se cumple:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

Por dato:

$$a \cdot b \cdot b \cdot c = 375\,000 \dots (1)$$

$$a + 2b + c = 100 \dots (2)$$

De (2):

$$2(a + c) = 100 \text{ \& } a + c = 50 \dots (3)$$

Luego:  $b = 25$

$$\text{En (1): } a \cdot c \cdot 25^2 = 375\,000$$

$$a \cdot c = 600 \dots (4)$$

De (3) y (4):  $a = 30 \wedge c = 20$

$$a - c = \mathbf{10}$$

4. La relación entre los ángulos internos de un triángulo es de 2, 3 y 4. Hallar el mayor ángulo

**Resolución:**

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ \wedge \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\theta}{4}$$

$$\alpha = 2k; \beta = 3k; \theta = 4k$$

$$2k + 3k + 4k = 180^\circ \rightarrow k = 20^\circ$$

$$\theta = 4(20^\circ) = 80^\circ$$

5. Tres números están en la misma relación que 5, 9 y 13. Si la suma de ellos es 216, indicar el mayor de ellos.

**Resolución:**

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{9} = \frac{c}{13} \wedge a + b + c = 216$$

$$a = 5k; b = 9k; c = 13k$$

$$5k + 9k + 13k = 216 \rightarrow k = 8$$

$$c = 13(8) = 104$$

**TRABAJANDO EN CLASES**

1. Si:  $a/b = 2/3$  y  $a^3 + b^3 = 280$ . Hallar:  $a + b + 4$   
A) 12 B) 13 **C) 14** D) 15 E) 16
2. Hallar la tercera proporcional de 2 y 8.  
A) 30 B) 31 C) 35 **D) 32** E) 42
3. En una serie de razones geométricas equivalentes de razón 3, los consecuentes son tres números consecutivos. Hallar la suma de los consecuentes, sabiendo que el producto de antecedente es 5 670.  
**A) 18** B) 80 C) 44 D) 46 E) 54
4. Sabiendo que la razón geométrica de dos números cuya diferencia de cuadrados es 180, se invierte al sumar 6 al menor y restar 6 al mayor, hallar su producto.  
A) 180 **B) 216** C) 270  
D) 396 E) Hay dos respuestas
5. Los antecedentes de varias razones geométricas iguales son 2; 3; 4 y 5 y el producto del primer antecedente y los tres últimos consecuentes es 41 160. La suma de los consecuentes es:  
A) 94 B) 95 C) 96 D) 97 **E) 98**

6. Cuatro números son proporcionales a: 1; 2; 3 y 5, además la suma de los cubos de dichos números es 1.288. El mayor es:  
A) 20 B) 5 C) 15 D) 8 **E) 10**
7. En un corral hay patos y gallinas. Si el número de patos es al total como 3 a 7; y la diferencia entre patos y gallinas es 20, ¿cuál será la relación entre patos y gallinas al quitar 50 gallinas?  
A) 4 : 3 **B) 2 : 1** C) 3 : 4  
D) 3 : 2 E) 2 : 3
8. Dos números son proporcionales a 2 y 5 respectivamente, si se suma 175 al primero y 115 al segundo se obtienen cantidades iguales. ¿Cuál es el número menor?  
**A) 40** B) 50 C) 60 D) 75 E) 80
9. Al repartir una cierta cantidad en partes proporcionales a los jornales de tres operaciones que son 60; 100 y 80 soles, correspondió al segundo 10 soles más que al primero. ¿Cuánto le corresponde al tercero en soles?  
A) 7 B) 10 C) 15 D) 19 **E) 20**
10. En un nido de infantes la relación entre el número de niños y niñas es de 4 a 3. Si después de 2 horas, 8 niños son recogidos por su mamá y a la vez llegan 5 niñas, entonces la nueva relación será de 2 a 7. ¿Cuántas niñas quedan en el nido?  
A) 12 **B) 14** C) 16 D) 15 E) 9

**ASUMO EL RETO**

11. La razón de dos números es  $\frac{3}{4}$  y  $\frac{2}{3}$  de su producto es 1152. Hallar los números.  
**A) 48 y 36** B) 28 y 72 C) 39 y 48  
D) 40 y 48 E) 60 y 65
12. La medida de un ángulo y su complemento están en la relación de 4 a 5. Dar el suplemento de dicho ángulo.  
A)  $120^\circ$  B)  $130^\circ$  C)  $160^\circ$   
D)  $110^\circ$  **E)  $140^\circ$**
13. La suma, la diferencia y el producto de dos números están en la misma relación que los números 10, 6 y 32. Hallar los números.  
A) 18 y 6 **B) 16 y 4** C) 20 y 5  
D) 24 y 6 E) 18 y 3
14. La suma de los 4 términos de una proporción es 130, cada uno de los tres últimos términos es los  $\frac{2}{3}$  del precedente. ¿Cuál es el último término?

A) 16 B) 18 C) 15 D) 12 E) 14

15. Un jugador de billar A le da ventaja a otro B 40 carambolas para 100 y B le da de ventaja a otro C, 60 carambolas para 100. ¿Cuántas carambolas debe dar A a C en un partido de 100?  
A) 70 B) 72 C) 74 **D) 76** E) 78

**SEMANA 05 DE ARITMÉTICA****MAGNITUDES PROPORCIONALES.****Magnitud**

Se llama magnitud a toda cualidad o característica susceptible de variar (aumentar o disminuir). Por ejemplo: la longitud, la masa, el tiempo, etc.

**Cantidad**

Es todo caso particular de una magnitud, resultado de la medición de una determinada magnitud. Por ejemplo: 5 m, 40 kg, 20 min, etc.

**RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES:**❖ **Magnitudes directamente proporcionales (DP):**

Dos magnitudes son DP o solamente proporcionales si al multiplicar el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra también queda multiplicado por dicho número.

Veamos un ejemplo:

Costo (S/.)	3	6	15	21
N.º lápices	1	2	5	7

$\xrightarrow{\times 2}$   $\xrightarrow{\times 5}$   $\xrightarrow{\times 7}$   
 $\xleftarrow{\times 2}$   $\xleftarrow{\times 5}$   $\xleftarrow{\times 7}$

Por ello podemos afirmar que:

**Costo (DP) n.º lápices**

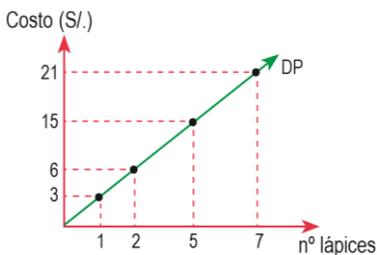
Además, podemos ver:

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{15}{5} = \frac{21}{7} = 3 \leftarrow \text{constante}$$

Entonces:

$$\frac{\text{costo}}{\text{n.º lápices}} = \text{constante}$$

Representando los valores de las dos magnitudes en el sistema de coordenadas rectangulares



**IMPORTANTE**

1. La gráfica de dos magnitudes D.P., son puntos que pertenecen a una recta que pasa por el origen de coordenadas.
2. En cualquier punto de la gráfica (excepto el origen de coordenadas) el cociente de cada par de valores resulta una constante.

• **En general**

**Notación:**

$$A \text{ (D.P.) } B \rightarrow \frac{\text{valor de (A)}}{\text{valor de (B)}} = \text{constante}$$

- Como el gráfico es una recta la función es lineal y la ecuación es de la forma:  $y = mx$  donde  $m$  es la pendiente.

También:  $f(x) = mx$

$y$  = valor de la magnitud A  
 $x$  = valor de la magnitud B

❖ **Magnitudes directamente proporcionales (DP):**

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda dividido por dicho valor.

Veamos un ejemplo:

N.º obreros	5	10	15	50
N.º días	60	30	20	6

Diagram showing relationships: 5 to 10 (x2), 10 to 15 (x3), 15 to 50 (x10) for obreros; 60 to 30 (÷2), 30 to 20 (÷3), 20 to 6 (÷10) for días.

Por ello podemos afirmar que:

$$n.º \text{ obreros (IP)} \cdot n.º \text{ días}$$

Además, podemos ver:

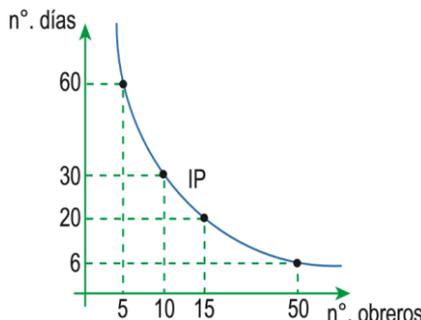
$$5 \times 60 = 10 \times 30 = 15 \times 20 = 50 \times 6 = 300$$

constante

Entonces:

$$(n.º \text{ obreros})(n.º \text{ días}) = \text{constante}$$

Representando los valores de las dos magnitudes en el sistema de coordenadas rectangulares:



**IMPORTANTE**

1. La gráfica de dos magnitudes IP, son puntos que pertenecen a una rama de una hipérbola equilátera.
2. En cualquier punto de la gráfica el producto de cada par de valores correspondientes resulta una constante.

• **En general.**

**Notación**

$$A \text{ (IP)} B \Rightarrow (\text{valor de A})(\text{valor de B}) = \text{constante}$$

• **También :**

$y$  = valor de la magnitud A  
 $x$  = valor de la magnitud B |  
 $\therefore yx = k$   
 $k$  = constante

De donde se obtiene la función:

$$y = \frac{K}{x}$$

**REPARTO PROPORCIONAL**

Procedimiento que consiste en repartir una cantidad en forma DP y/o IP a ciertos valores llamados índices de proporcionalidad.

Existen dos tipos de reparto proporcional.

❖ **Reparto simple:**

Se reparte en función a una sola restricción, puede ser directa o inversa.

Veamos algunos ejemplos:

- Reparte S/.72 DP a 3 y 5.

**Resolución:**

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{5} = k(\text{constante}) \rightarrow A = 3k \wedge B = 5k$$

Además:

$$\begin{aligned} A + B &= 72 \\ 3k + 5k &= 72 \\ 8k &= 72 \rightarrow k = 9 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 492 \\ 2k + 3k + 7k &= 492 \\ 12k &= 492 \rightarrow k = 41 \end{aligned}$$

Luego, las partes repartidas son:

$$A = 27 \text{ y } B = 45$$

- Reparte S/. 72 IP a 3 y 5.

**Resolución:**

$$3A = 5B \text{ (dividiendo entre 15)}$$

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{3} = m \rightarrow A = 5m \wedge B = 3m$$

$$\begin{aligned} A + B &= 72 \\ 5m + 3m &= 72 \\ 8m &= 72 \rightarrow m = 9 \end{aligned}$$

Luego, las partes repartidas son:

$$A = 45 \text{ y } B = 27$$

❖ **Reparto compuesto:**

Se reparte considerando dos o más restricciones.

Veamos un ejemplo:

- Reparte S/.316 en partes que sean DP a los números 3; 4 y 6, y a la vez IP a los números 5; 5 y 7.

**Resolución:**

Sean las partes repartidas A; B y C, luego:

$$5\left(\frac{A}{3}\right) = 5\left(\frac{B}{4}\right) = 7\left(\frac{C}{6}\right) \rightarrow \text{(dividiendo entre MCM(5; 5; 7) = 35)}$$

$$\frac{A}{7 \times 3} = \frac{B}{7 \times 4} = \frac{C}{5 \times 6} = k \rightarrow A = 21k, B = 28k, C = 30k$$

$$\text{Además: } A + B + C = 316$$

$$21k + 28k + 30k = 316$$

$$79k = 316 \rightarrow k = 4$$

$$\text{Luego: } A = 84; B = 112 \wedge C = 120$$

**REPARTO DE COMPAÑÍA**

La regla de compañía tiene por objeto repartir entre varios socios los beneficios (ganancias) que han obtenido o las pérdidas que han sufrido en sus negocios.

Sean las magnitudes: capital, ganancia y tiempo, entonces:

Ganancia DP Capital (tiempo constante)

Ganancia DP Tiempo (capital constante)

Luego:

$$\frac{\text{Ganancia}}{(\text{Capital})(\text{Tiempo})} = \text{constante}$$

Ejemplo:

Jimmy y Mario emprenden un negocio, el primero aporta S/.10 000 y el segundo S/.12 000. Si han permanecido en el negocio 8 y 5 meses, respectivamente y, si al terminar el negocio quedó una utilidad de S/.8400, ¿cuánto es la ganancia de cada socio? ¿Cuál es el monto con el que se retiran?

**Resolución:**

	Capital	Tiempo	Ganancia
Jimmy	10 000	8	$G_1$
Mario	12 000	5	$G_2$

$$\text{Reemplazando: } \frac{G_1}{10\,000 \times 8} = \frac{G_2}{12\,000 \times 5} = k$$

$$\text{Simplificando: } \frac{G_1}{4} = \frac{G_2}{3} = k$$

$$\text{Entonces: } G_1 = 4k \wedge G_2 = 3k$$

$$\text{Luego sabemos que: } 7k = 8400 \rightarrow k = 1200$$

- La ganancia de cada socio es:



Jimmy:  $4k = 4(1200) = S/.4800$

Mario:  $3k = 3(1200) = S/.3600.$

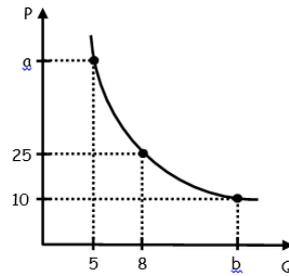
- El monto con el que se retira cada socio es:

Jimmy:  $10\ 000 + 4800 = S/.14\ 800$

Mario:  $12\ 000 + 3600 = S/.15\ 600$

**TRABAJANDO EN CLASES**

- Se sabe que “P” varía D.P. al cubo de “R” e I.P. a la raíz cuadrada de “T”, ¿Cuál expresión representa la relación correcta entre las tres magnitudes?  
(K = constante de proporcionalidad)
  - a)  $\frac{P}{R\sqrt{T}} = K$
  - b)  $\frac{P}{R\sqrt[3]{T}} = K$
  - c)  $\frac{P\sqrt{T}}{R^2} = K$
  - d)  $\frac{P\sqrt{T}}{R^3} = K$
  - e)  $\frac{P\sqrt{T}}{R} = K$
- Si “A” varía D.P. a “B” y cuando A = 800, B = 250. Hallar “A” cuando B = 75.  
**A) 240** B) 150 C) 160 D) 260 E) 280
- Sabiendo que A es IP  $\sqrt{B}$  si cuando B aumenta en su triple A varía en 30 unidades. Dar el valor de A.  
A) 20 B) 40 **C) 60**  
D) 80 E) 100
- Se sabe que  $A^2$  y B son I.P. y cuando A toma el valor de 20 A es a B como 10 es a 9. ¿Qué valor teoría A cuando B es 72?  
A) 100 **B) 5** C) 10 D) 20 E) 80
- Se tienen dos magnitudes A y B tales que A es D.P. a  $B^2$ ; si cuando B aumenta en 2 unidades, el valor de A se cuadruplica, ¿Qué sucede con el valor de A si B aumenta en 4 unidades?  
A) Se multiplica por 6  
B) Se multiplica por 8  
**C) Se multiplica por 9**  
D) Se divide entre 6  
E) Se divide entre 4
- Si la siguiente gráfica muestra dos magnitudes inversamente proporcionales. Hallar “a + b”



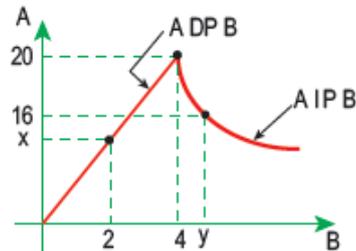
- A) 30
- B) 36
- C) 40
- D) 48
- E) 60**

- Si “A” es directamente proporcional a la raíz cuadrada de “B” completar el siguiente cuadro y dar la suma de los valores obtenidos.

A	240	160	
B	81		225

- A) 138
- B) **436**
- C) 283
- D) 428
- E) 346

- Calcula  $(x^2 + y^2)$ , si:



- A) 115
- B) 140
- C) 135
- D) 130
- E) 125**

- El gasto del profesor “Tulio” es D.P. a su sueldo, siendo el resto ahorrado si su sueldo equivale a S/. 900 ahorra S/. 90. ¿Cuál será su sueldo cuando su gasto sea de S/. 1,260?  
**A) 1400** B) 1134 C) 1500  
D) 1600 E) 1300
- Divide 1320 en partes que sean directamente proporcionales a  $\sqrt{1183}$ ;  $\sqrt{1372}$ ;  $\sqrt{2023}$ . Da como respuesta la mayor cantidad.  
**A) 510** B) 450 C) 380 D) 190 E) 200

**ASUME EL RETO**

11. "P" varía D.P. a "Q" e I.P. a "R"; cuando  $Q = 240$  y  $R = 600$  entonces  $P = 30$ . Hallar "P" cuando  $Q = 500$  y  $R = 150$ .  
A) 750    **B) 250**    C) 300  
D) 450    E) N.A.
12. La magnitud "A" es directa al cuadrado de "B" e inversa a la raíz cuadrada de la suma de "C" y "D" cuando  $A = 5$ ,  $B = 3$ ,  $C = 6$  y  $D = 10$ . ¿Qué valor toma "A" cuando  $B = 15$ ,  $C = 9$  y  $D = 16$ ?  
A) 20 B) 50 C) 80 D) 30    **E) 100**
13. El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Si un diamante cuesta \$ 800. ¿Cuánto costará otro diamante que pesa al doble del anterior?  
A) \$ 1600    B) 2400    C) 3000  
**D) 3200**    E) 4000
14. El precio de un televisor a color varía en forma D.P. al cuadrado de su tamaño e I.P. a la raíz cuadrada de la energía que consume. Si cuando su tamaño es de 14 pulg. y consume "E" de energía su precio es de S/. 360. ¿Cuántos costará un televisor cuyo tamaño es de 21 pulgadas y consume E/4 de energía?  
A) 1240    B) 950    **C) 1620**  
D) 3600    E) N.A.
15. Se desea repartir una gratificación de S/.1290 entre 3 trabajadores A, B y C en forma DP a los años de servicio, DP al rendimiento e IP a sus minutos de tardanza. De acuerdo al cuadro siguiente, ¿cuánto le corresponde al que recibe la parte mayor de la gratificación?

	Años	Rendimiento	Tardanza
A	15	80	40 h
B	12	90	30 h
C	10	70	35 h

- A) S/.640    B) S/.720    C) S/.620  
D) S/.680    **E) S/.540**

**SEGUNDA UNIDAD****SEMANA 06 DE ARITMETICA****REGLA DE TRES**

La regla de tres es aquella que reúne magnitudes y permite hallar una cuarta. Es muy sencillo y útil al mismo tiempo y en donde siempre los datos que corresponden a la misma magnitud y deben estar en la misma columna.

**Regla de tres Simple Directa:**

Es aquella regla de tres simple en la que dos magnitudes que intervienen son directamente proporcionales, cumpliéndose por lo tanto que el cociente de sus cantidades correspondiente permanece constante.

$$\begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ c \longrightarrow x \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b \cdot c}{a}$$

**Regla de tres Simple Inversa:**

Es aquella en la que las dos magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales, es decir, que el producto de sus cantidades correspondiente es constante.

$$\begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ c \longrightarrow x \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a \cdot b}{c}$$

**Regla de tres Compuesta**

Es aquella en la cual intervienen más de dos magnitudes

**Método de los signos**

Dado el conjunto de datos del problema:

- 1) se escriben el supuesto y la pregunta, teniendo cuidado que esta última este siempre de la anterior.
- 2) Se compara cada una de las magnitudes con aquellas que contengan la incógnita (suponiendo que las demás no varían) determinándose de esta forma su relación de proporcionalidad.
- 3) A las magnitudes que sean directamente proporcionales con la magnitud incógnita se les asigna a la cantidad inferior un signo + y a la superior un signo - ; si en cambio fueran inversamente proporcionales con la

incógnita a la inferior se coloca - y a la superior +.

- 4) En la magnitud incógnita a la cantidad correspondiente a la incógnita siempre se coloca signo +.
- 5) El valor de la incógnita será igual al cociente entre el producto de todas las cantidades que llevan signo +, por todas aquellas que llevan signo -.

DIRECTA ±

$$X = \frac{(+)}{(-)}$$

INVERSA ±

### EJEMPLOS

1. Una bola compacta de acero cuesta 54 soles. ¿Cuántos soles menos costaría, si su radio fuese  $\frac{1}{3}$  menos?

#### Solución

Radio de la bola: a

$$\text{Volumen: } \frac{4}{3} \pi (a)^3$$

Si el radio fuese  $\frac{1}{3}$  menos

$$\text{Nuevo radio: } \frac{2}{3} a$$

$$\text{Nuevo volumen: } \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2}{3} a\right)^3$$

Tendríamos:

$$a^3 \text{ ----- } 54 \text{ soles}$$

$$\left(\frac{2}{3} a\right)^3 \text{ ----- } x \text{ soles (directa)}$$

$$x = 54 \cdot \frac{8}{27}$$

$$x = 16 \text{ soles}$$

2. Una persona por cada 100 huevos que compra, se le rompen 10 y por cada 100 que vende da 10 de regalo. Si vendió 1800 huevos ¿Cuántos huevos ha comprado?

#### Solución

En la venta se tiene:

Cuando vende 100 ----- entrega 110

Cuando vende 1800 ----- entrega x

$$x = \frac{1800 \times 110}{100} = 1980 \text{ huevos}$$

En la compra se tiene:

Cuando compra 100 ----- recibe 90

Cuando compra x ----- recibe 1980

$$x = \frac{100 \times 1980}{90} = 2200 \text{ huevos}$$

3. Un campamento de 2700 hombres tienen víveres para 60 días, después de haber transcurrido 10 días, se refuerza con cierto número de hombres y los víveres duran 36 días más que los transcurridos. ¿Cuántos hombres formaban el refuerzo?

#### Solución

La regla se plantea considerando los víveres que aún quedan después de los 10 días.

$$\begin{array}{r} 2700 \text{ hombres ----- } 50 \text{ días} \\ x \text{ ----- } 36 \text{ días (inversa)} \end{array}$$

$$x = 2700 \text{ hombres} \cdot \frac{50}{36}$$

$$\begin{array}{l} x = 3750 \text{ hombres} \\ \text{Refuerzo:} \\ 3750 - 2700 = 1050 \end{array}$$

4. Doce costureras pueden hacer un tejido en 23 días trabajando 3 horas diarias. Después de 5 días se retiran 2 costureras, y 6 días después de esto se contratan "X" costureras adicionales para terminar a tiempo. Hallar "X".

#### Solución

Horas de trabajo:

$$12 \times 23 \times 3 = 828 \text{ horas}$$

En 5 días han hecho:

$$12 \times 5 \times 3 = 180 \text{ horas}$$

Y en 6 días  $10 \times 6 \times 3 = 180$

En 11 días han trabajado 360 horas, les falta por hacer  $(828 - 360) = 468$

$$828 \text{ hr. } \quad 23 \text{ días} \quad 12 \text{ cost.}$$

$$468 \text{ hr. } \quad 12 \text{ días} \quad x \text{ cost.}$$

$$x = 12 \times \frac{468}{828} \times \frac{23}{12} = 13 \text{ días}$$

$$13 - 10 = 3 \text{ costureras}$$

5. Un fabricante de paraguas vende 6000 de ellos a s/. 2.800 c/u durante la temporada de lluvias que dura 4 meses. Determinar cuántos vende en un mes en el verano si la demanda por paraguas es la quinta parte de la época de lluvias y si ha rebajado el precio a s/. 2.400. se sabe además que cuando se disminuye el precio aumenta la venta.

## Solución

Demanda	Precio	Periodo	Cantidad
1	S/. 2.800	4 mes	6000
1/5	S/. 2.400	1 mes	x

$$x = 6000 \times \frac{2800}{2400} \times \frac{1}{4} = 350$$

$$x = 350$$

## PROBLEMAS

1. Dos poleas están conectadas como en la figura. Si la polea menor da 180 vueltas por minuto. ¿Cuántas vueltas por minuto da la polea mayor?



- A) 40    B) 45    C) 30  
D) 46    E) 25
2. Cuatro tractores deben arar un campo en 5 días trabajando 10 horas diarias, si al cabo de dos días de trabajo se decide hacer  $\frac{3}{4}$  del trabajo que falta en  $\frac{5}{4}$  de día trabajando 8 horas diarias; hallar entonces cuantos tractores más serían necesarios para poder realizar esa parte del trabajo.
- A) 5    B) 7    C) 8  
D) 10    E) 11
3. Una compañía contrata 20 hombres para asfaltar  $800 \text{ m}^2$  de una pista en 10 días. Si después de cuatro días de trabajo, se les comunica que tienen que asfaltar en total  $1000 \text{ m}^2$  de la misma pista y debe terminarse un día antes de lo acordado. ¿Cuántos hombres más de la misma capacidad deberán contratarse?
- A) 12    B) 14    C) 10  
D) 6    E) 7
4. Un trabajo puede ser hecho por 20 hombres en 12 días. Luego de 4 días se enferman varios hombres, sin embargo, los restantes aumentan su eficiencia en un porcentaje tal que terminan el trabajo en la fecha fijada. Si el porcentaje que aumento la eficiencia fue un número entero menor que 100 determinar cuántos hombres se enfermaron
- A) 3    B) 4    C) 5

D) 6    E) 7

5. Se estima que 30 personas construyan una cerca en 60 días, transcurridos 25 días se incorporan 12 personas más ¿En cuántos días menos la obra estará terminada?

A) 17    B) 12    C) 15  
D) 10    E) 19

6. Una obra que tiene una dificultad que es como 7 se puede hacer con 7 máquinas de un rendimiento del 45% en 20 días de 11 horas de trabajo. ¿En cuántos días de 10 horas de trabajo se hará una obra que es el volumen como  $\frac{15}{9}$  de la obra anterior con una dificultad que es como 8 harán 12 máquinas con un rendimiento del 55%?

A) 17    B) 16    C) 15  
D) 20    E) 19

7. Doce obreros comienzan a hacer un trabajo y a los 15 días, han hecho la tercera parte de la obra. ¿Cuántos obreros adicionales de la misma eficiencia es necesario contratar para que la obra se termine a los 21 días de iniciado?

A) 56    B) 46    C) 48  
D) 56    E) 40

8. Veinticuatro obreros se comprometen a cavar una zanja de 50 m. de largo, 8 m. de ancho y 2 m. de profundidad en 10 días. A los 5 días se deciden aumentar todas las dimensiones en 50%. ¿Cuántos obreros nuevos se necesitan para terminar el contrato en el plazo fijado si los nuevos son 50% más eficientes que los antiguos?

A) 56    B) 66    C) 76  
D) 86    E) 96

9. Dos cuadrillas de 34 obreros cada una hacen un tramo de carretera en partes iguales, luego de 72 días de comenzada la obra se observa que mientras los primeros les falta  $\frac{3}{5}$  de obra los otros han hecho  $\frac{4}{5}$ . Si se quiere que la 1era. parte de la obra esté terminada en 140 días. ¿Cuántos obreros del 2do. grupo deberán pasar al 1er. grupo?

A) 10    B) 20    C) 30  
D) 40    E) 50

10. 81 obreros han hecho una zanja de 15 m de largo 12 de ancho y 4 de profundidad trabajando durante 24 días, 5 horas diarias. ¿Cuántos obreros más se necesitaran para hacer una zanja



de 5 m de largo, 16 de ancho y 8 de profundidad  
en 10 días trabajando 8 horas diarias?

- A) 102      B) 104      C) 106  
D) 108      E) 110

## TAREA

- Para pintar un cubo de 10 cm de arista se pagó 24 soles. ¿Cuánto se pagará por un cubo de 15 cm de arista?  
A) 14                      B) 24                      C) 34  
D) 44                      E) 54
- Para sembrar flores en un jardín de forma cuadrada de 6 metros de lado una persona cobra 27 soles. ¿Cuánto cobraría si el jardín tuviera 4 metros de lado?  
A) 12                      B) 13                      C) 18  
D) 20                      E) 21
- En 80 litros de agua de mar hay 20 gr de sal ¿Cuántos litros de agua pura hay que agregar para que en cada 10 litros de la mezcla haya 5/3 gr de sal?  
A) 10                      B) 20                      C) 30  
D) 40                      E) 50
- Sabiendo que 20 obreros, trabajando 6 horas diarias pueden hacer una obra en 10 días, determinar en cuantos días 30 obreros, trabajando 8 horas diarias pueden hacer una obra cuya dificultad es dos veces la anterior.  
A) 5                      B) 10                      C) 20  
D) 25                      E) 35
- Una rueda de 45 dientes engranada con otra de 60 dientes, si la velocidad de la primera es de 48 R.P.M. Hallar la velocidad de la segunda rueda.  
A) 34 R.P.M    B) 30 R.P.M    C) 26 R.P.M  
D) 36 R.P.M    E) 38 R.P.M

## CLAVE

1	2	3	4	5
E	A	D	B	D

**PORCENTAJES****SEMANA 07 DE ARITMETICA**

El porcentaje es una manera práctica de hablar que ayuda a dar una idea inmediata de la magnitud de una cantidad respecto a otra. A una cantidad a cualquiera la suponemos como un todo, que llamamos el 100%, entonces podemos partir a esa cantidad en 100 partes y hablar de cualquiera de sus partes.

$$\frac{Q}{C} = \frac{P}{100} \Rightarrow Q = \frac{P}{100} * C$$

$$Q = P\% * C$$

P: Es el tanto por ciento

C: Es la cantidad de referencia

Q: Es el porcentaje

El tanto por ciento **P** de una cantidad **C** expresado en fracción es:

$$P\% \text{ de } C = \frac{P}{100} C$$

## EJEMPLOS

- Debo pagar el 40% del 70% de 500 soles, pero solo he cancelado el 50% del 50% de mi deuda ¿Cuánto debo aún?

## Solución

**Debo: 40% del 70% = 28%****He cancelado: 50% del 50% = 25%****Debo aún: 3% de 500 = 15 soles**

- En una granja de aves, el 40% son gallinas, si ha vendido el 20% de las gallinas y han quedado 276 aves ¿Cuántas aves no son gallinas?

## Solución

Sea:

N el número pedido (60%) aves vendidas:

$$20\% \text{ del } 40\% = 8\%$$

Aves que quedan: 92% &lt;&gt; 276

60% &lt;&gt; N

N = 180

- Se aumenta sucesivamente el precio de un artículo en un 5%, 6% y 8%. Si el recargo total fue 4040.80. Hallar el precio inicial.

## Solución

**Calculemos la cantidad final 105% del 106% del 108% = 120.2040%**

**Recargo: 20.2040%**Sea: **x = precio inicial****20.2040% de x = 4040.80****De donde: x = s/. 20000**

- Una cosecha de 800 kg de nueces con cascara ha dado el 40% de nueces mondadas; las

nueces mondadas dan el 60% de su peso, de aceite. ¿Cuántos litros de aceite se obtuvieron si un litro de aceite pesa 800 gr?

**Solución**

Cálculo del aceite en kg  
 60% del 40% de 800 = 192 kg  
 192 kg = 192000 gr  
 Convirtiendo a litros  
 19200 : 800 = 240 litros

5. El número primo más próximo a 55, es 6% más. ¿De qué número?

**Solución**

**El numero primo más próximo a: 55 es 53**

**Sea: x el numero pedido 106% de x = 53**

**De donde:**

$$x = \frac{100 \times 53}{106}$$

$$x = 50$$

**PROBLEMAS**

- ¿Qué porcentaje de  $(a + b)$  es  $(a^2 - b^2)$ ?  
 A) 100 (a-b)    B) 100    C) (a-b)  
 D) (a+b)    E) 50 (a+b)
- ¿Qué porcentaje es  $1/18$  de  $2/3$ ?  
 A)  $8 \frac{1}{3}\%$     B)  $9 \frac{1}{2}\%$     C)  $10 \frac{1}{3}\%$   
 D)  $4 \frac{1}{3}\%$     E)  $5 \frac{1}{3}\%$
- El largo de un rectángulo aumenta un 8% y el ancho disminuye en "m" %, no habiendo variado el área. Hallar "m".  
 A) 3.8%    B) 6.4%    C) 5.5%  
 D) 7.4%    E) 7%
- Un aumento del 20% seguido de un descuento del 20%. ¿A qué aumento o descuento único equivale?  
 A) 3%    B) 4%    C) 5%  
 D) 6%    E) 7%
- Se compra un artículo en 800 soles ¿Qué precio debe fijarse para su venta al público para hacer un descuento del 20% y aun ganar el 25%?  
 A) 7500    B) 6500    C) 5500  
 D) 1250    E) 7300

6. Un artículo se vende con un recargo del 15%. Inicialmente se pensaba ganar el 20% del precio de costo más el 25% del precio de venta. Al final se gana S/. 25.200. Hallar el importe por el recargo impuesto.

A) 7500    B) 6500    C) 5500  
 D) 7300    E) 7200

7. José jefe de personal tiene encomendado reducir el sueldo básico de sus empleados. Si llega a establecer dos descuentos del 40% y 25% el descuento único será:

A) 56%    B) 55%    C) 68%  
 D) 60%    E) 78%

8. El jornal de un obrero se le aumento el 12% sobre los primeros S/.60 y el 9% del resto; si de esa manera en una semana gana S/.607.74. ¿Cuál era el jornal antes de recibir el aumento?

A) 56    B) 68    C) 78  
 D) 106    E) 98

9. A Juan compre 10 kg de azúcar y lo vendo haciendo dos aumentos sucesivos del 30% y 40%. Hallar el incremento único que se estableció en la venta de azúcar.

A) 78%    B) 58%    C) 68%  
 D) 55%    E) 82%

10. El 2 por 375 de cierta cantidad se aumenta en 169 unidades de modo que resulta igual a la diferencia entre el 40% del 5% de dicha cantidad y el 20% del 3% de la misma. Luego dicha cantidad aumentada en el 20% del 50% de su 40% será:

A) 20.280    B) 30.280    C) 40.280  
 D) 45.280    E) 50.280

**TAREA**

1. Al precio de un objeto se le hacen tres descuentos sucesivos del 5%, 10% y 20%. ¿Cuál es el descuento único que equivale a estos tres descuentos sucesivos?

A) 30.50%    B) 31.60%    C) 32.40%  
 D) 33.60%    E) 34.20%

2. Pagando 2750 soles por un cierto artículo que se está pagando el 10%, de su costo en recargo. ¿A cómo debería venderse para ganar el 38.5% del precio de costo?

A) S/.1452.5    B) S/.2478.5    C) S/.3462.5



D) S/.4723.7 E) S/.5598.2

3. Para vender un artículo a S/.2346 se ha tenido que hacer tres descuentos sucesivos de 20%, 15% y 8% sobre su precio de lista. Hallar este precio de lista.

A) S/.1450 B) S/.3750 C) S/.5645  
D) S/.8650 E) S/.2550

4. A un objeto que costo S/. 120000 se le desea fijar un precio de lista, de tal modo que haciéndole dos descuentos sucesivos del 10% y 20% aún se gane el 20% del precio costo. Hallar dicho precio de lista.

A) 55% B) 50% C) 66%  
D) 60% E) 72%

5. Un señor compra un artículo por 59.400 pero el vendedor le dice que si compra 3 le hacen una rebaja, por lo que paga S/.88.506 más. ¿Qué porcentaje del precio real representa la rebaja?

A) S/.6.280 B) S/.8.280 C) S/.10.280  
D) S/.20.280 E) S/.30.280

**CLAVE**

1	2	3	4	5
B	C	B	E	D

**MEZCLAS Y ALEACIONES**

**SEMANA 08 DE ARITMETICA**

La regla de mezcla es el procedimiento de cálculo que da a conocer los artificios aritméticos utilizados en la resolución de problemas relativos a mezclas y aleaciones.

Esta regla tiene su fundamentación en el hecho de que en el comercio se acostumbra a "mezclar" diversas clases de mercaderías de distintos precios para poder venderla a un precio intermedio.

**PRECIO:** costo de cada unidad de una mercancía.

**VALOR:** costo total de la mercancía.

Se presentan dos casos generales; llamados el problema directo y el problema inverso.

**El problema directo de mezclas**

(Para calcular el precio medio o precio costo de las mezclas)

En general el precio medio o precio de costo, se calcula con la fórmula:

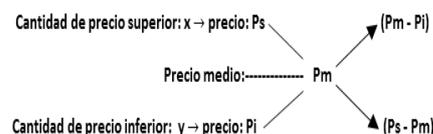
$$\text{Precio medio} = \frac{\text{costo total de la mezcla}}{\text{número de unidades de la mezcla}}$$

**El problema inverso**

Permite calcular la proporción en que deben mezclarse sustancias de precios conocidos, para que la mezcla resulte a un precio dado comprendido entre ambos.

Las cantidades que deben mezclarse para obtener una mezcla de precio prefijado, son inversamente proporcionales a la diferencia entre sus precios y el precio intermedio fijado.

De esta regla surge el método práctico llamado aspa simple:

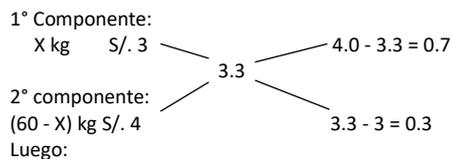


$$\frac{X}{Y} = \frac{Pm - Pi}{Ps - Pm}$$

**EJEMPLOS**

1. ¿Qué cantidad de harina de 3 soles el kg se debe mezclar con harina de 4 soles el kg para obtener 60 kg de harina de 3.3 soles el kg?

**Solución**



Luego:

$$\frac{X}{60 - X} = \frac{7}{3}$$

$$X = 42 \text{ kg}$$

2. Hallar la ley de una aleación que se obtiene al fundir tres barras de oro que pesan 120, 180, y 200 gr con leyes de 21, 22 y 23 kilates respectivamente.

**Solución**

Se aplica: Promedio ponderado

$$\text{Ley: } \frac{120 \times 21 + 180 \times 22 + 200 \times 23}{120 + 180 + 200}$$

$$X = 22.16 \text{ Kilates}$$





- A) 4                      B) 8                      C) 12  
D) 14                      E) 16
7. Un comerciante tiene vinos de S/.55 y S/.37 lt. y los mezcla de tal forma que por 11 partes del 1ro. pone 13 partes del 2do. ¿A cómo debe vender el litro si se quiere ganar el 40%?
- A) S/.58.75      B) S/.60.20      C) S/.63.35  
D) S/.73.25      E) S/.70.50
8. Un comerciante mezcla 2 tipos de trigo de 80 y 50 soles el kilo, poniendo 15kg más de un tipo que del otro vende todo a 70 soles el kilo y de esta forma gana 8 soles por kilo. Hallar cual es la ganancia de vender todo el trigo.
- A) S/.200      B) S/.300      C) S/.400  
D) S/.500      E) S/.600
9. Se tiene papa de S/.54.75 el kilo y papa de S/.50.75 el kilo. Si de una de ellas se tiene 90 kilos más que la otra, ¿Cuántos kilos de mezcla se obtienen a un precio medio de S/.52 el kilo?
- A) 240                      B) 250                      C) 260  
D) 270                      E) 280
10. Un comerciante compra 36 litros de un tipo de vino y 24 litros de otro, y paga S/.4.320 en total. Hallar a cuánto debe vender el litro de la mezcla si a al final quiere ganar S/.780.
- A) S/.65                      B) S/.70                      C) S/.75  
D) S/.80                      E) S/.85

#### TAREA

1. Al fundir 3 lingotes cuyas leyes en oro son 0.9, 0.8 y 0.6 se obtuvo un lingote cuya ley se desea conocer; los pesos de los tres lingotes son inversamente proporcionales a sus leyes y el tercero pesa 40 gramos más que el primero.
- A) 8                      B) 9                      C) 10  
D) 13                      E) 15
2. ¿Qué cantidad de oro puro habrá que añadir a una barra de 300 g de oro de 20 kilates para obtener oro de 21 kilates?
- A) 100                      B) 120      C) 140  
D) 160                      E) 180
3. Un motor del Toyota está diseñado para consumir gasolina de 91 octanos. En el Perú se vende gasolina de 84 y 95 octanos a 9, 100 y 11 soles respectivamente. ¿Cuántos soles se emplearán en llenar el tanque de 14 galones de dicho automóvil con gasolina de 91 octanos?. Sabiendo además que solo existen 2 galones de 90 octanos y todo es utilizado.

- A) 143.83      B) 143.73      C) 143.63  
D) 143.53      E) 143.43
4. Se mezclan dos tipos de vino en volúmenes que sean como 3 es a 2 y luego se vende con 20% de ganancia, se obtendría lo mismo si lo mezcláramos en proporción de 2 a 3 y lo vendiéramos con 30% de ganancia. Hallar la relación de los precios de las dos clases de vino.
- A) 2 a 3                      B) 4 a 4                      C) 2 a 2  
D) 3 a 3                      E) 3 a 2
5. Se mezclan cantidades (que son números enteros) de vino de S/. 680 y S/.750 el litro en una relación de 2 es a x respectivamente. Se vende la mezcla perdiendo el 5% a 693.50 el litro. Si del primer vino (de S/.680 el litro) se mezcla 40 lt. ¿Qué cantidad entra del otro?
- A) 100                      B) 200                      C) 300  
D) 400                      E) 500

#### CLAVE

1	2	3	4	5
C	A	C	E	A

#### ESTADÍSTICA

#### SEMANA 09 DE ARITMÉTICA

Es la disciplina que se ocupa del estudio de las técnicas de acumular y analizar datos y de establecer conclusiones acerca de la recopilación u obtención de datos.

Comprende un conjunto de métodos para planificar experimentos, recabar datos, organizarlos, presentarlos ilustrativamente, analizarlos, interpretarlos y llegar a conclusiones.

El origen de la palabra estadística proviene de la voz latina STATERA que significa equilibrio o balanza y la voz alemana STAAT que significa estado.

#### Conceptos básicos en estadística

**Población:** conjunto de elementos que tienen características comunes observables.

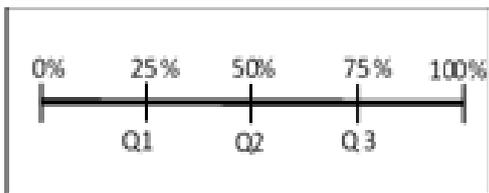
**Muestra:** subconjunto de la población.

**Variable:** es cada una de las características que se pueden observar o medir en la población. Pueden ser de dos tipos: cualitativas, cuando se expresan como atributos o categorías y las cuantitativas que se expresan con números.

#### Ramas de la estadística

**Estadística descriptiva:** trata de la recopilación, clasificación, presentación y descripción de los datos obtenidos de una población o muestra.

**Cuartiles:** Son valores que dividen a un conjunto de datos ordenados en forma ascendente o descendente en cuatro partes iguales.

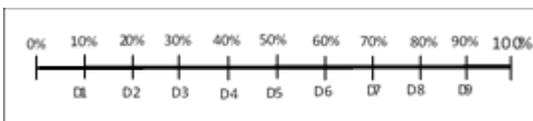


Q1 = 1er cuartil, deja el 25% de las observaciones menores o iguales a él y el 75% superiores a él.

Q2 = 2do cuartil, coincide con la mediana.

Q3 = 3er cuartil, deja el 75% de las observaciones inferiores o iguales a él y el 25% superiores a él.

**Deciles:** Son valores que dividen a un conjunto de datos ordenados en forma ascendente o descendente en 10 partes iguales.



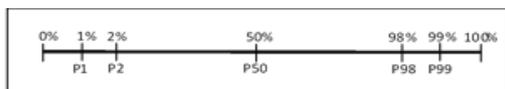
D1 = 1er decil, deja el 10% de las observaciones menores o iguales a él.

D2 = 2do decil, deja el 20% de las observaciones menores o iguales a él.

⋮

D9 = 9no decil, deja el 90% de las observaciones menores o iguales a él y el 10% superiores a él.

**Percentiles:** Son valores que dividen a la muestra ordenada en forma ascendente o descendente en 100 partes iguales



P1 = 1er percentil, deja el 1% de las observaciones menores o iguales a él y el 99% superiores a él.

⋮

P99 = 99avo percentil, deja el 99% de las observaciones menores o iguales a él y el 1% superiores a él.

**Estadística inferencial:** no proporciona la teoría necesaria para realizar alguna afirmación acerca de la población o tomar decisiones generales a partir de los datos recogidos y estudiados.

**EJEMPLOS**

- Hallar la desviación estándar para el caso de las notas de 5 alumnos que son: 8, 10, 12, 15 y 18.

**Solución**

$$S^2 = \frac{(8-12.6)^2 + (10-12.6)^2 + (12-12.6)^2 + (15-12.6)^2 + (18-12.6)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(4.6)^2 + (2.6)^2 + (0.6)^2 + (2.4)^2 + (5.4)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{21.16 + 6.76 + 0.36 + 5.76 + 29.16}{5}$$

$$S^2 = \frac{63.2}{5}$$

$$S^2 = 12.64$$

Luego, la desviación estándar será

$$S = \sqrt{12.64}$$

$$S = 3.56$$

- El promedio armónico de 60 números es 17 y el promedio armónico de otros 40 números es 34. Hallar el promedio armónico de los 100 números.

**Solución**

$$MH(60 \text{ números}) = \frac{60}{S_{inversas}(60 \text{ números})} = 17$$

$$S_{inversas}(60 \text{ números}) = \frac{60}{17}$$

$$MH(40 \text{ números}) = \frac{40}{S_{inversas}(40 \text{ números})} = 34$$

$$S_{inversas}(40 \text{ números}) = \frac{40}{34} = \frac{20}{17}$$

$$MH(100 \text{ números}) = \frac{100}{\frac{60}{17} + \frac{20}{17}} = \frac{85}{4}$$

- De acuerdo al cuadrado sobre estado de vida

¿En cuál de las ciudades aumenta más en porcentaje el costo de vida de 2000 a 2005?

### Solución

Para Tokio: si:  
 125 ----- 100%  
 15 ----- x  
 $x = \frac{15 \times 100\%}{125} = 12,1\%$

Para Madrid: si:  
 85 ----- 100%  
 10 ----- x  
 $x = \frac{10 \times 100\%}{85} = 11,76\%$

Para Washington: si:  
 85 ----- 100%  
 10 ----- x  
 $x = \frac{5 \times 100\%}{85} = 5,88\%$

RPTA: En Madrid

4. Las notas de un grupo de estudiantes en el curso de matemática básica, son: 12, 11, 10, 15, 12, 13, 12, 12, 12. Hallar la moda.

### Solución

Como la nota 12 es la que se repite con mayor frecuencia, entonces  $Mo = 12$

5. La cantidad de paltas que el Sr. Miguel Seclén cosecho de cada uno de los árboles frutales de su huerto es la siguiente: 38, 45, 76, 47, 52, 48, 68, 73, 39, 43. Calcular el promedio y la mediana. Además, examinar qué ocurre cuando se modifica uno cualquiera de los datos que no está en las posiciones centrales, ¿cambian los valores del promedio y de la mediana?

### Solución

Calculo del promedio aritmético:

$$\bar{x} = \frac{38+45+76+47+52+48+68+73+39+43}{10} = \frac{529}{10} = 52,9$$

Calculo de la mediana:

CUADRO DEL COSTO DE VIDA		
PAIS	2000	2005
TOKIO	180	200
FRANKFURT	170	165
NEW YORK	100	100
LIMA	85	65
MADRID	85	95
WASHINGTON	150	155

los valores en forma creciente: 38, 39,43, 45, 47, 48, 52, 68, 73, 76.

- b) Como son 10 valores, no hay un único valor central sino 2: 47 y 48, entonces tomamos como mediana la semisuma de ambos

$$\text{Valores } Me = \frac{47+48}{2} = 47,5$$

### PROBLEMAS

- En un curso de química, las notas finales de 11 alumnos fueron 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13 y 14. El profesor manifiesta que aprueba el curso todo aquel que tiene una nota mayor que la media aritmética o que la mediana. Hallar el número de alumnos que aprobaron  
 A) 1      B) 2      C) 5  
 D) 7      E) 9
- La edad promedio de 4 hombres es 65 años. Ninguno de ellos es mayor de 70 años. ¿Cuánto es la edad mínima que cualquiera de los hombres puede tener?  
 A) 30      B) 35      C) 45  
 D) 50      E) 60
- Dada la siguiente distribución, determine los cuartiles Q1 Y Q3.

Intervalos de clase	(6; 16)	(16 ; 26)	(26 ; 36)	(36;46 )	(46 ; 56)
fi	8	20	25	10	5

- A) 19 y 20      B) 20 y 30      C) 20,5 y 35,2  
 D) 23 y 25      E) 21,5 y 22
- ¿Cuál es la desviación estándar de 12, 18, 08, 14, 04, 16 y 09?  
 A) 1.25      B) 2.13      C) 2.97  
 D) 3.15      E) 4.89
  - Determine el cuarto decil y el 72vo percentil de la siguiente distribución de frecuencias.

Intervalos	fi	Fi
(40; 50)	8	8

(50; 60)	20	28
(60; 70)	30	58 (clase de D4)
(70; 80)	40	98 (clase de P72)
(80; 90)	10	108
(90; 100)	2	110
<b>TOTAL</b>	<b>110</b>	

- A) 70.31 y 71    B) 78 y 79    **C) 65,33 y 75,3**  
 D) 75.62 y 76    E) 65.80 y 75.5
6. En la prueba de lógico matemático se tomó el tiempo en minutos empleado por los alumnos, obteniendo los siguientes resultados: 30, 40, 35, 50, 28, 45, 38 y 42. Halle la desviación estándar.

**A) 7.41**            B) 8.22            C) 8.92  
 D) 9.14            E) 10.12

7. En un seminario de didáctica de la matemática se encuentra 14 estudiantes y 4 profesores. Si los estudiantes tienen un promedio de edad de 18 años y los profesores un promedio de edad de 36 años, ¿calcular el promedio de edad de todo el grupo?

**A) 22**            B) 19            C) 21  
 D) 18            E) 23

8. Sean a, b y c enteros positivos. Si MG (a, b), MG (a, c) y MG (b, c) son directamente proporcionales a los números 3, 4 y 5, respectivamente, hallar el valor la constante de proporcionalidad que hace que los números a, b y c sean los menores posibles. .

A) 65            B) 55            **C) 60**  
 D) 50            E) 45

9. Si el promedio aritmético de un conjunto de números aumenta en 3 unidades, cuando se le suma 7 unidades a cada uno de los 18 primeros números, ¿Cuántos elementos tiene el conjunto de números?

A) 32            **B) 42**            C) 44  
 D) 48            E) 64

10. Hallar dos números sabiendo que el producto de su media armónica por su media aritmética es 196 y el producto de su media aritmética por su media geométrica es 245.

A) 49.6            **B) 28.7**            C) 24.11  
 D) 30.5            E) 26.9

### TAREA

1. En una encuesta aplicada a algunos alumnos sobre el número de hermanos que tiene cada uno de ellos, se obtuvo el siguiente resultado: 6 alumnos tienen 2 hermanos cada uno, 10 alumnos tienen 3 hermanos a cada uno, 8 alumnos tienen 4 hermanos cada uno y 6 alumnos son hijos únicos. Hallar la variación con respecto al número de hermanos en la sección.

A) 1.25            B) 1.97            C) 2.34  
 D) 2.87            E) 3.12

2. En una sección de 20 estudiantes se aplicó una prueba de comunicación y se obtuvo las diferencias de las notas de cada alumno con respecto al promedio. Se encontró que la suma de los cuadrados de esas diferencias era igual a 40. Calcule la varianza

A) 1            B) 1.15            C) 1.25  
 D) 1.50            E) 2

3. La suma de las varianzas de dos grupos A y B es 13 y su diferencia es 5. Hallar el producto de las desviaciones estándares.

A) 18            B) 20            C) 28  
 D) 32            E) 36

4. Los sueldos que perciben los 15 empleados de una empresa son los siguientes: 5000, 3000, 500, 500, 800, 700, 750, 950, 500, 800, 950, 500, 750, 800 y 500 nuevos soles respectivamente. Calcule el sueldo promedio y analice si es un valor representativo del conjunto de sueldos indicados.



- A) 1133.33    B) 1133.98    C) 1135.32  
D) 1132.02    E) 1132.95

5. La media aritmética de 3 números enteros positivos es 14, su media armónica es  $\frac{32}{7}$  su media geométrica igual a uno de los números. Hallar la diferencia del mayor y menor de estos números.

- A) 15            B) 20            C) 25  
D) 30            E) 35

CLAVE

1	2	3	4	5
B	E	E	A	D

**PROBABILIDAD****SEMANA 10 DE ARITMETICA**

La probabilidad se encarga del estudio de incertidumbre; es la parte de la matemática que trata de manejar el azar con números. La necesidad de una teoría de probabilidades nace cuando han de estudiarse experimentos aleatorios. En todos los experimentos ha de suceder algo y se tiene que observar algún hecho. La cosa hecha o la parte observada, junto con la observación que resulta, componen el conjunto del experimento.

La noción de la probabilidad bien de la necesidad de medir de alguna manera la certeza o la duda de que algún suceso dado ocurra o no. Un número unido a una aserción o suceso, recibe el nombre de probabilidad.

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ de casos favorables}}{N^{\circ} \text{ de casos totales}}$$

**Conceptos básicos de probabilidad**

**Espacio muestral ( $\Omega$ ):** es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

**Evento (E):** es un subconjunto del espacio muestral.

**Probabilidad:** es el cociente del número de elementos del evento entre el número de elementos del espacio muestral.

**EJEMPLOS**

1. Al lanzar 2 monedas ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean caras?

**Solución**

$\Omega = \{(cara, cara), (cara, sello), (sello, cara), (sello, sello)\}$   
Entonces  $n(\Omega) = 4$

$E1 = \{(cara, cara), \text{ entonces } n(E1) = 1\}$

$E2 = \{(cara, sello), \text{ entonces } n(E2) = 1\}$

$E3 = \{(sello, cara), \text{ entonces } n(E3) = 1\}$

$E4 = \{(sello, sello), \text{ entonces } n(E4) = 1\}$

La probabilidad para que se de el evento E1 es

$$E1 = P(E1) = \frac{n(E1)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

La probabilidad de que ambas sean caras es  $\frac{1}{4}$

2. En una bolsa se tiene 9 caramelos de limón y 3 de fresa. Si se extraen al azar 2 caramelos ¿Cuál

es la probabilidad de que salgan 2 caramelos de limón?

**Solución**

Casos totales:  $c_2^{12} = 66$

Casos a favor:  $c_2^8 = 36$

Probabilidad:  $\frac{36}{66} = \frac{6}{11}$

3. En un concurso particular de 8 alumnos y 9 alumnas, deben haber 2 ganadores ¿Cuál es la probabilidad de que los ganadores sean una pareja mixta?

**Solución**

Casos favorables: 8 . 9 combinaciones

Casos totales:  $c_2^{17} = 136$

Probabilidad:  $\frac{72}{136} = \frac{9}{17}$

4. Tres cazadores A, B y C están apuntando a un búfalo. La probabilidad de que acierten es  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{7}$  y  $\frac{2}{3}$  respectivamente ¿Cuál es la probabilidad de que acierten los 3?

**Solución**

Sabemos que:

$$P_{A \cap B \cap C} = P(A) * P(B) * P(C)$$

(Para eventos independientes)

$$P_{A \cap B \cap C} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{35}$$

5. Se extrae una carta de un juego de casino de 52 cartas ¿Cuál es la posibilidad que sea una reina?

**Solución**

Número total de casos: 52

Número de casos favorables: 52 - 4 = 48

$$P = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

**PROBLEMAS**

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados, se obtenga como suma de los números obtenidos un resultado mayor que 7?

A) 22/7

B) 15/36

C) 31/2

- D) 27/7      E) 1
2. Al lanzar tres monedas ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos 2 caras?  
A) 3/5      B) 5/12      C) 4/7  
D) 3/2      E) 5/7
3. En una carpeta se van a ubicar 5 hombres y 4 mujeres ¿Cuál es la probabilidad que se ubiquen en forma alternada?  
A) 92/2650      B) 11/26      C) 4/361  
D) 7/365      E) 1/126
4. En un almacén hay 12 artículos, de los cuales 4 son defectuosos. Si se extraen 2 artículos, calcule la probabilidad de que:  
a) Ambos artículos son defectuosos.  
b) Ambos artículos no son defectuosos.  
c) Por lo menos uno es defectuoso.  
A) 1/11, 14/33 y 19/33      B) 3/4, 1/22 y 15/23  
C) 5/7, 1/10 y 18/33      D) 8/11, 25/12 y 1/2  
E) 1/11, 14/34 y 18/43
5. Tres alumnos A, B Y C se matriculan al azar en el curso de matemática, que tiene 4 secciones numeradas con 401, 402, 403 y 404, pudiendo matricularse los 3 alumnos en una misma sección.  
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos se matricule en la sección 404?  
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos se matricule en 2 secciones cualesquiera?  
A) 25/60 y 24/50      B) 26/60 y 50/76  
C) 27/64 y 48/64      D) 23/21 y 25/64  
E) 40/55 y 45/45
6. En una urna se tiene fichas numeradas del 1 al 40. Se extrae una ficha y se sabe que es el par. ¿Cuál es la probabilidad de que este número sea divisible por 3?  
A) 7/10      B) 5/10      C) 3/10  
D) 1/10      E) 1
7. Se va a seleccionar un comité de 3 personas a partir de 6 hombres y 4 mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que los 3 sean hombres?  
A) 1/6      B) 2/3      C) 3/6  
D) 4/2      E) 1/7
8. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 2 dados, la suma de los 2 resultados no sean mayor que 8?  
A) 26/36      B) 13/23      C) 10/32  
D) 25/25      E) 23/23

9. En una caja hay 10 focos de los cuales 4 están en buen estado, una persona toma al azar 3 focos. Halla la probabilidad de que por lo menos uno esté en buen estado.  
A) 3/2      B) 4/2      C) 4/4  
D) 4/8      E) 5/6
10. Se tiene una caja en la cual hay dos bolas rojas, cinco blancas y seis negras. Encuentra la probabilidad que al sacar una bola al azar esta sea blanca.  
A) 5/3      B) 2/8      C) 2/4  
D) 4/5      E) 6/3

## TAREA

1. Se lanzan 2 dados ¿Cuál es la probabilidad que la suma de puntos sea un número primo?  
A) 1/25      B) 5/12      C) 2/34  
D) 2/87      E) 3/12
2. 10 libros de los cuales 6 son de aritmética y 4 de álgebra; se colocan al azar en un estante. Halla la probabilidad de que los libros de cada materia estén juntos  
A) 1      B) 1/105      C) 1/250  
D) 1/50      E) 2
3. Se lanzan 3 monedas y dos dados ¿cuál es la probabilidad de que aparezcan 3 caras y 2 números pares?  
A) 1/38      B) 2/10      C) 2/18  
D) 1/32      E) 3/26
4. Una caja contiene 6 focos defectuosos y 5 buenos. Se sacan 2 a la vez. Se prueban uno de ellos y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro también sea bueno?  
A) 2/4      B) 2/5      C) 2/6  
D) 2/7      E) 3
5. Se lanza dos dados ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 5 como resultado?  
A) 15/15      B) 20/20      C) 25/36  
D) 11/36      E) 13/26

## CLAVE

1	2	3	4	5
B	B	D	B	D

## ÁLGEBRA

Lic. Jose Capcha Rivera  
Mg.J.Daniel Torres Soplin  
Mg. Ronald Cuevas Huayta  
Lic. Leidy Julissa Córdova Girón

### PRIMERA UNIDAD

#### SEMANA 01 DE ALGEBRA

##### Algebra:

Estudia las estructuras con que queda provisto un conjunto al definir en ellos ciertas leyes (operaciones).

El álgebra comprende esencialmente dos partes : La teoría (elementos) de los polinomios , y la teoría de las ecuaciones y de las formas algebraicas .

#### TEORÍA DE EXPONENTES

#### I. TEORÍA DE EXPONENTES

##### 1.1. CONCEPTO:

La teoría de exponentes estudia las diversas relaciones existentes entre todas las clases de exponentes, mediante leyes.

##### A. POTENCIACIÓN:

ELEMENTOS:

$$b^n = A$$

Dónde: **n**: exponente **b**: base **A**: potencia

$$b^n = \underbrace{b.b.b.b.b\dots .b}_{"n" \text{ veces}}$$

- Se llama potencia a la operación algebraica que consiste en multiplicar la base por ella misma las veces que indica el exponente.

EJEMPLO 1:  $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

EJEMPLO 2:  $6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 216$

**B. RADICACIÓN:** La radicación es una operación inversa a la potenciación. Que consiste en buscar un número que multiplicado las veces que indica el índice se igual al radicando

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{n: índice} \quad \sqrt{\phantom{x}}: \text{Radical (operador)}$$

**a**: radicando **b**: raíz

❖  $\sqrt[n]{-A} = \text{número positivo}$

❖  $\sqrt[\text{impar}]{-A} = \text{número negativo}$

#### 1.2. PROPIEDADES:

##### 1) Producto de bases iguales:

$$b^m \cdot b^n \cdot b^p = b^{m+n+p}$$

EJEMPLO:  $3^2 \times 3^3 \times 3 = 3^6$

##### 2) Cociente de bases iguales:

$$b^m \div b^n = b^{m-n}$$

EJEMPLO:  $3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$$

EJEMPLO:  $6^5 / 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$

##### 3) Potencia de potencia:

$$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$$

EJEMPLO:  $(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2}$

##### 4) Exponente negativo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EJEMPLO:  $5^{-2} = 1/5^2$

##### 5) Potencia de un producto:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

EJEMPLO:  $(3 \cdot 2)^3 = 3^3 \cdot 2^3$

##### 6) Potencia de un cociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

EJEMPLO:  $(6/2)^3 = 6^3 / 2^3$

##### 7) Potencia negativa de un cociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

EJEMPLO:  $(8/6)^{-2} = 6^2 / 8^2$

##### 8) Exponente cero:

$$b^0 = 1 ; b \neq 0$$

EJEMPLO:  $25^0 = 1$

##### 9) Exponente fraccionario:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

EJEMPLO:  $6^{4/3} = \sqrt[3]{6^4}$ **10) Potencia de una raíz:**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

EJEMPLO:  $(\sqrt[3]{27})^2 = \sqrt[3]{27^2}$ **11) Raíz de un producto:**

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

EJEMPLO:  $\sqrt[3]{2 \cdot 3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$ **12) Raíz de un cociente:**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

EJEMPLO:  $\sqrt[3]{8/6} = \sqrt[3]{8} / \sqrt[3]{6}$ **13) Inclusión de un número a un radical:**

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

EJEMPLO:  $2 \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 4}$ **14) Multiplicación del índice por un número:**

$$\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n \cdot k]{b^{m \cdot k}}$$

EJEMPLO:  $\sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{4^{2 \cdot 2}}$ **15) Raíz de una raíz:**

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{b}}}} = \sqrt[n \cdot m \cdot p \cdot q]{b}$$

EJEMPLO:  $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{30}}}} = \sqrt[3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3]{30}$ 

$$\sqrt[n]{a^m \sqrt{b}} = \sqrt[n]{a \cdot a^{m-1} \sqrt{b}}$$

EJEMPLO:  $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[4]{16} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3 \cdot 4]{16}$ **16) Raíz de una raíz con variables entre radicales:**

$$\sqrt[n]{b^m \sqrt[p]{b^q}} = \sqrt[n \cdot p]{b^{m \cdot p + q}}$$

$$\sqrt[n]{b^m \sqrt[p]{b^q} \sqrt[r]{b^s}} = \sqrt[n \cdot p \cdot r]{b^{(m \cdot p + q) \cdot r + s}}$$

**Nota:**

$$\frac{1}{b^n} = a^m \rightarrow b = a^{m \cdot n}$$

$$b^{\frac{p}{n}} = a^m \rightarrow b = a^{\frac{m \cdot n}{p}}$$

**EJEMPLOS**

1. Efectuar:

$$(-x^2)^3 (-x^{-3})^2 (x^{3^2}) (x^{-3^2}) (-x^{(-3)^2})$$

- A)  $x^6$       B)  $-x^6$       C)  $x^{-9}$       D)  $x^9$   
E)  $x^{12}$

**Solución**

$$(-x^2)^3 (-x^{-3})^2 (x^{3^2}) (x^{-3^2}) (-x^{(3^2)})$$

$$(-x^6)(x^{-6})(x^9)(x^{-9})(-x^9)$$

$$x^6 \cdot x^{-6} \cdot x^9 \cdot x^{-9} \cdot x^9$$

$$x^{6-6} \cdot x^{9-9} \cdot x^9$$

$$x^0 \cdot x^0 \cdot x^9$$

$$x^9$$

2. Simplifica:

$$\frac{5^{2x+1} \cdot 3^x - 5^{2x} \cdot 3^{x-1}}{5^{2x} \cdot 3^x - 5^{2x-1} \cdot 3^{x-1}}$$

**Solución**

$$\frac{5^{2x} \cdot 5 \cdot 3^x - 5^{2x} \cdot 3^x \cdot 3^{-1}}{5^{2x} \cdot 3^x - 5^{2x} \cdot 5^{-1} \cdot 3^x \cdot 3^{-1}}$$

$$\frac{5^{2x} \cdot 3^x (5 - 3^{-1})}{5^{2x} \cdot 3^x (1 - 5^{-1} \cdot 3^{-1})}$$

$$\frac{(5 - \frac{1}{3})}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{14}{3}}{1 - \frac{1}{15}} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{14}{15}} = \frac{15}{3} = 5$$

3. Simplificar:

$$\frac{5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}}{5^n}$$

**Solución**

$$\frac{5^n + 5^n \cdot 5 + 5^n \cdot 5^2}{5^n} = \frac{5^n(1 + 5 + 5^2)}{5^n} = 31$$

4. Simplificar:

$$A = \left[ (-27)^{-\frac{2}{3}} + (-27)^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{81} \right]^{-0.2}$$

**Solución**

$$A = \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{-27^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-27^5}} + \frac{2}{81} \right]^{\frac{1}{5}}$$

$$A = \left[ \frac{1}{9} - \frac{1}{243} + \frac{2}{81} \right]^{\frac{1}{5}} = \left[ \frac{32}{243} \right]^{\frac{1}{5}}$$

$$A = \left[ \frac{32}{243} \right]^{\frac{1}{5}} = \left[ \frac{243}{32} \right]^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{3}{2}$$

5. Simplificar:

$$E = n-2 \sqrt{\frac{3^{2n+5} - 9 \cdot 3^{2n+1}}{24 \cdot 3^{n+4}}}$$

**Solución**

$$E = n-2 \sqrt{\frac{3^{2n+5} - 3^2 \cdot 3^{2n+1}}{2^8 \cdot 3 \cdot 3^{n+4}}}$$

$$E = n-2 \sqrt{\frac{3^{n+3} \cdot 3^{n+2} - 3^{n+3} \cdot 3^n}{3^{n+3} \cdot 3^2 \cdot 2^8}}$$

$$E = n-2 \sqrt{\frac{3^{n+3}(3^{n+2} - 3^n)}{3^{n+3} \cdot 3^2 \cdot 2^8}}$$

$$E = n-2 \sqrt{\frac{3^n(3^2 - 1)}{3^2 \cdot 2^8}} = n-2 \sqrt{\frac{3^n}{3^2}}$$

$$E = n-2 \sqrt{3^{n-2}} = 3$$

**TRABAJANDO EN CLASES**

1. Reducir:

$$K = \frac{15^6 x^{12} x^4 x^5 x^6 x^3}{10^{11} x^3 x^{13} x^5 x^4}$$

- A) 1                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 5

2. Simplificar:

$$E = \frac{2^{-22} + 2^{-21} + 2^{-20}}{2^{-23} + 2^{-22} + 2^{-21}}$$

- A) 1                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 5

3. Simplificar:

$$Y = \left( \frac{16^{-0,25} + (-8)^{-1/3}}{4^{-0,5} - 9^{-0,5}} \right)^3$$

- A) 0                      B) 1                      C) 8  
D) 27                      E) 9

4. Simplificar:

$$A = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} \cdot \sqrt{\sqrt{x \sqrt{x}}}$$

- A) 1/x                      B) x                      C) x<sup>2</sup>  
D) 1                      E) 2

5. Simplificar:

$$G = \frac{2^{x+1} + 2^{x-1}}{2^{x-1} + 2^{x-2} - 2^{x-3}}$$

- A) 1                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 5

6. El valor de:

$$K = \frac{40 \cdot 2^{x-3} + 3 \cdot 2^{x+1} + 12 \cdot 2^{x-2}}{22 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+2}}$$

- A) 1                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 5

7. Simplificar:

$$E = m \sqrt{\frac{4^{m+2} + 2^{2m+2}}{20^{m+1}}}$$

- A) 5                      B) m                      C) 1/5  
D) 1                      E) 9

8. Simplificar:

$$n-2 \sqrt{\frac{3^{2n+5} - 3(9^{n+1})}{24(3^{n+4})}}$$

- A) 1                      B) 2                      C) 3  
D) 1/2                      E) 9

9. Hallar "x" en:

$$81^{5-x} \cdot 27^{2x-3} = 243^{x-2}$$

- A) 4                      B) 5                      C) 6  
D) 7                      E) 9

10. Hallar "x" en:

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{x^2-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1-x} = \left(\frac{81}{16}\right)^{x^2-x}$$

- A) 1                      B) 4                      C) 4 y 1



- D) 3                      E) 5

**TAREA DOMICILIARIA**

11. Reducir:

$$E = \left\{ a^{-1} \left[ a \left( a^{\frac{2}{3}} \right)^3 \right] \right\}$$

- A) 1                      B) a                      C) -1  
 D) a                      **E) a<sup>2/3</sup>**

12. Reducir:

$$R = \sqrt[m]{\frac{10^m + 15^m + 6^m}{5^{-m} + 2^{-m} + 3^{-m}}}$$

- A) 30**                      B) 10                      C) 15  
 D) 6                      E) 20

13. Reducir:

$$K = \left\{ (-64)^{-1/3} - (-32)^{-0,6} \right\}^{-1/3}$$

- A) 0,5                      B) -0,5                      C) 2  
**D) -2**                      E) 0,25

14. Hallar el valor de “x” en:

$$2^{x+1} - 2^{x-3} - 2^{x-2} = 52$$

- A) 1                      **B) 5**                      C) 4  
 D) 3                      E) 6

15. Calcular “y” en:

$$y^{-1} \sqrt{\frac{y^{3y-20} - y^y}{y^y - y}} = y$$

- A) 19**                      B) 20                      C) 15  
 D) 13                      E) 34

**SEMANA 02 DE ÁLGEBRA**  
**EXPRESIONES ALGEBRAICAS**

No se puede hablar de Grados de Expresiones Algebraicas sin antes saber que significa expresión algebraica.

Se denomina expresión algebraica a la unión del coeficiente (numero) con la parte literal (letras) y que al encontrar el valor de la incógnita se transforma en constante; ejemplo:

$$5X; -2X^2; 0,6X^2; -3Y; 4NY; 2NY^3 - 3/7$$

**VARIABLE** = Letras: a, b, c, d, e,... x, y, z  
**CONSTANTE** = Numero y es la que tiene un solo valor .Ejemplo: -1; 0.7; 3; 8; etc.

**GRADOS DE UN MONOMIO:** Son dos

**I) GRADO RELATIVO (G.R.)**

**A) EL GRADO RELATIVO DE UN MONOMIO** respecto a una variable es el exponente de dicha variables en el monomio. Ejemplo:

-2.4x<sup>6</sup>y<sup>3</sup>; es de grado SEIS, o de sexto grado respecto a “X”  
 es de grado TRES, o tercer grado respecto a “Y”

**B) EL GRADO ABSOLUTO DE UN MONOMIO**, es la suma de los exponentes de sus variables, Ejemplo:

Xy<sup>2</sup>n<sup>3</sup>; es de sexto grado porque: 1+2+3=6  
 -5x<sup>4</sup>zy<sup>3</sup>; es de octavo grado porque: 4+1+3=8

**II) GRADO DE UN POLINOMIO:** Son dos

**A) EL GRADO RELATIVO DE UN POLINOMIO** respecto a una variable es el mayor grado de dicha variable en el polinomio, Ejemplo:

6x<sup>3</sup>y-2,1x<sup>2</sup>y<sup>3</sup>+7xy<sup>4</sup>; Es de tercer grado con respecto a “x”

De cuarto grado con respecto a “Y”

**B) GRADO ABSOLUTO DE UN POLINOMIO** es la suma mayor de los exponentes del término. Ejemplo

$5xy - 2x^2y - 4x^2y^3 + 2x^2y^2$ ; es de quinto grado absoluto (porque así indica la suma de los exponentes del 3º término)

## EL POLINOMIO

**POLINOMIO:** Significa unión de varios términos algebraicos por medio de los signos de las cuatro operaciones (+, -, x, :)

### POLINOMIO ORDENADO

**A) EN FORMA CRECIENTE:** Un polinomio está ordenado en forma creciente respecto a una variable, si los exponentes de dicha variable se suceden de menor a mayor. Ejemplo:

$2x + 5x^3x^4$  está ordenado en forma creciente respecto a "x"

$3x^2y - 5y^4 + xy^6$ ; ordenado en forma creciente a "Y"

**B) EN FORMA DECRECIENTE:** Un polinomio está ordenado en forma decreciente respecto a una variable, si los exponentes de dicha variable se sucedan de mayor a menor. Ejemplo:

$x^4 - 3x^3 + 7$ ; ordenado en forma decreciente respecto a la variable "x"

$2xy^4 + x^2y^2 - y$ ; ordenado en forma decreciente respecto a la variable "y"

### POLINOMIOS ESPECIALES

**POLINOMIO HOMOGÉNEO:** Son aquellos cuyos grados de sus términos son iguales

\*  $P(x; y) \equiv x^2 - 2xy + y^2$  = cada uno de sus términos es de grado 2; por eso se dice que es polinomio homogéneo

\*  $P(x; y; z) \equiv 6x^3 + 5xy^3 - \frac{1}{4}xyz$  también es de un polinomio homogéneo.

### POLINOMIO ORDENADO:

Son los que presentan un orden ascendente o descendente en los exponentes de una de las variables que se toma como: variable ordenativa. Ejemplo:

$P(x) \equiv 7x^{10} - \frac{1}{2}x^4 + \sqrt{2}x - 6$ . Los exponentes de "x" presentan un orden, descendente de izquierda a derecha, por lo tanto se trata de un polinomio Ordenado descendientemente con respecto a "X"

### POLINOMIO COMPLETO:

Son los que tienen todos los exponentes, desde el mayor hasta el exponente cero, de la variable que se toma como bases.

$$P(X) = 6X^4 - 2\sqrt{3}X^2 - \frac{1}{7}X + 10 + X^3$$

Aparecen todos los exponentes de "x" desde 4 hasta 0, que es el exponente de "x" en términos independientes, es decir  $10 = 10x^0$

### POLINOMIOS IDENTICOS:

Son aquellos polinomios donde sus términos semejantes poseen igual coeficiente. Veamos un ejemplo:

Dados:  $P(x) \equiv ax^3 + bx + c$   $\wedge$   $Q(x) \equiv mx^3 + nx + p$ . Si ellos son idénticos se denota así:

$$P(x) \equiv Q(x). \text{ Y}$$

Cumple:

$$a = m \wedge b = n \wedge c = p$$

### POLINOMIOS IDENTICAMENTE NULOS:

Es aquel polinomio donde todos sus coeficientes son iguales a cero.

Dado:  $P(x) \equiv ax^3 + bx + c$  si:  $P(x)$  es idénticamente nulo, se denota así:

$P(x) \equiv 0$  y se cumple que:

$$a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$$

**POLINOMIOS EQUIVALENTES:** Son aquellos polinomios que teniendo formas diferentes aceptan igual valor numérico para un mismo sistema de valores asignados a sus variables. Veamos un ejemplo:

Dados:

$$P(x; y) \equiv (x + y)^2 - (x - y)^2 \wedge Q(x; y) = 4xy$$

Si ambos poseen el mismo valor numérico para cualquier valor de "x"  $\wedge$  "y" entonces serán equivalentes.

Hagamos en cada uno de los polinomios el siguiente cambio:  $x = 2 \wedge y = 1$ .

$$P(2; 1) = (2+1)^2 - (2-1)^2 = 8 \wedge$$

$$Q(2; 1) = 4(2)(1) \equiv 8$$

Notar que hemos obtenido el mismo valor numérico con lo cual podemos afirmar que los polinomios son equivalentes

$$a = m \wedge b = n \wedge c = p$$

**EJEMPLOS**

1. Reducir las siguientes expresiones algebraicas :

$$3x^4 - 5x - 2x^4 + 3x - 7 - 2$$

**Solución**

2. Reduce:  $\sqrt{3}m^8 - \sqrt{2} + 5m^3 - 6 + \sqrt{2} - 7m^3$

**Solución**

3. Efectúa :  $0.1xy^2 - 0.02x^2y + 0.09xy^2 - 1 - 0.9x^2y$

**Solución**

4. Siendo:

$$P(x, y, z) \equiv ax^a y^b + by^b z^c + cx^a z^c$$

Un polinomio homogéneo

$$\text{Hallar: } \sqrt[n-1]{\frac{(a+b+c)^n}{a^n + b^n + c^n}}$$

**Solución**

$$a + b = b + c = a + c \rightarrow a = b = c$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{(a+a+a)^n}{a^n + a^n + a^n}} = \sqrt[n-1]{\frac{(3a)^n}{3a^n}}$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{3^n \cdot a^n}{3a^n}} = \sqrt[n-1]{3^{n-1}} = 3$$

5. Si el polinomio:

$$P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3)^2 - (2x+3)^2 + c$$

es idénticamente nulo. Hallar el valor de:

$$E = 3b - 2a + c$$

**Solución**

$$1^\circ \text{ término} \rightarrow a(x+2)^2 = ax^2 + 4ax + 4a$$

$$2^\circ \text{ término} \rightarrow b(x+3)^2 = bx^2 + 6bx + 9b$$

$$3^\circ \text{ término} \rightarrow -(2x+3)^2 = -4x^2 - 12x - 9$$

$$4^\circ \text{ término} \rightarrow c$$

$$(a+b-4)x^2 + (4a+6b-12)x + (4a+9b-9+c)$$

$$\text{como: } P(x) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$a+b+4=0 \rightarrow a+b=-4 \leftarrow (-2)$$

$$-2a-2b=8$$

$$4a+6b-12=0 \rightarrow 2a+3b=6$$

$$+2a+3b=6$$

$$-2a-2b=8$$

$$b=14 \wedge a=-18$$

$$4a+9b-9+c=0 \rightarrow 4(-18)+9(14)+c=9$$

$$c=-63$$

$$3b-2a+c=3(14)-2(-18)-63=15$$

**TRABAJANDO EN CLASES**

1. Hallar el producto de los grados relativos a: X, a Z: en el siguiente monomio:

$$P_{(x;y;z)} = 4X^{2n-1} \cdot Y^{3n+1} \cdot Z^{5n-9}$$

Sabiendo que es de grado 21.

- A) 100    B) 150    C) 250  
**D) 300**    E) 30

2. Hallar el grado del siguiente monomio:

$$M_x = 7x^{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots}}}}$$

- A) 1    **B) 2**    C) 3  
 D) 4    E) 6

3. Determinar "k" de manera que la expresión sea de 2do grado.

$$E = 3 \sqrt{\frac{x^{k-27} \sqrt{x^{3k}}}{4 \sqrt{x^{k+1}}}}$$

- A) 8    B) 5    **C) 7**  
 D) 6    E) 4

4. Calcular x para que la siguiente expresión:

$$E = \sqrt{x} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^3} \dots \sqrt{x^x} \text{ sea de 2do grado:}$$

- A) 3**    B) 4    C) 5  
 D) 6    E) 7

5. Hallar la suma de a + b si el grado absoluto del monomio es igual a 17, y su coeficiente tiene el mismo valor que el



grado relativo con respecto a “x”. Siendo el monomio:

$$M_{(x,y)} = (a + b) x^{2(a-1)} y^{3b}$$

- A) 5                      B) 6                      C) 7  
D) 8                      E) 10

6. Determinar “3n - 1” de modo que el monomio

$$M(x) = \sqrt[3]{\frac{x^{n-1} \cdot \sqrt{x^n}}{\sqrt[6]{x^{5n-4}}}}$$
 sea de primer grado.

- A) 14 B) 2 C) 3 D) 4 E) 10

7. Siendo el polinomio:  $P(x) = x^{24} + 128x^{17} + 2x^{11} + 64x^6 + 4x + 2$  Calcular:  $P(-2)$

- A) -6 B) 2 C) 8 D) 5 E) 0

8. Sea:  $P(x) = (m - 1)x^2 + mx + m + 1$  Si:  $P(2) = 4$ , calcular el valor de “m”.

- A) 6 B) 2 C) 8 D) 5 E) 1

9. Sabiendo que:  $P(x) = 3x + 2$  y  $P(g(x)) = 6x + 5$  Calcular:  $g(2) + g(-3)$

- A) 6 B) 2 C) 8 D) 5 E) 0

10. Si:  $P(x + 5) = 3x - 2$ , calcular “m”, si:  $P(2x + m) = 6x + 7$

- A) 6 B) 2 C) 8 D) 5 E) 0

**TAREA DOMICILIARIA**

11. Indicar el valor de “a + b”, si el polinomio:  $P(x) = (a^3 - 27)x^2 + (b^3 - 7)x + 5$  es lineal y mónico.

- A) 6 B) 2 C) 8 D) 5 E) 0

12. Si:  $P(x) = x(x - 2) + 3$  y además:  $P(a + 1) - P(a - 1) = 4$  Calcular:  $P(a)$

- A) 6 B) 2 C) 3 D) 5 E) 0

13. Sea el polinomio:  $P(x) = 3x + a$  y  $P(P(x)) = bx + 12$ ;  $b \neq 0$ , Calcular: “a + b”

- A) 6 B) 12 C) 8 D) 5 E) 0

14. Calcular:  $m + 2n$  en:  $m(x + n) + n(x + m) = 3x - 56$

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 3 E) 5

15. Asumiendo  $x > 0$  halle  $F(x)$ , si:

$$F(\sqrt{x-1}) = 2x - 5$$

- A)  $2X^2 + 4X - 3$

- B)  $X^2 + 3X - 3$

- C)  $7X^2 + 4X - 3$

- D)  $3X^2 + 5X - 3$

- E)  $3X^2 + X - 4$

**SEMANA 03 DE ÁLGEBRA**

**DIVISIÓN DE POLINOMIOS**

La División Euclidiana es aquella que se realiza con polinomios de una variable. Así tenemos los métodos de división:

**Métodos de HORNER**

**Ejemplo 1:**

Dividir:  $\frac{12x^4 - 17x^3 + 17x^2 + 2x - 9}{4x^2 - 3x + 1}$

4	12	-17	17	2	-9
3	9	-3			
-1		-6	2		
			6	-2	
	3	-2	2	10	-11
	$x^2$	x	T.I	x	T.I

$q(x) = 3x^2 - 2x + 2$   
 $R(x) = 10x - 11$

### Métodos de RUFFINI

Se utiliza cuando el divisor es mónico y de primer grado.

$$d(x) = x + b \quad b \neq 0$$

	Dividendo	
$x + b = 0$		1 Lugar
$-b$		
	Cociente	Resto

#### Ejemplo 2:

Dividir:  $\frac{2x^5 - 15x^3 - 20x + 8}{x + 3}$

	2	0	-15	0	-20	8
$x + 3 = 0$						
$-3$		-6	18	-9	27	-21
	2	-6	3	-9	7	-13

$$q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 9x + 7$$

$$R(x) = -13$$

### Métodos de RENÉ DESCARTES

#### (TEOREMA DEL RESTO)

Este teorema tiene por finalidad hallar el resto de una división sin efectuar la división.

Se siguen los siguientes pasos:

Se iguala el divisor a cero.

Se despeja una variable.

Se reemplaza el valor o equivalente de esta variable en el dividendo cuantas veces sea necesario.

#### Ejemplo 3:

$$\frac{8x^{2003} + 13x^2 + 1999}{x + 1}$$

- i)  $x + 1 = 0$   
 ii)  $x = -1$   
 iii) Se reemplaza:

$$R = 8(-1)^{2003} + 13(-1)^2 + 1999$$

$$R = -8 + 13 + 1999$$

$$R = 2004$$

#### Ejemplo 4:

Encontrar el residuo al dividir:  $\frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x - 3}$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$r(x) = (3)^4 - 3(3)^2 + 2 = 56$$

#### Ejemplo 5:

Dividir:  $\frac{x^5 - 32}{x - 2}$  y determinar el residuo.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$r(x) = (2)^5 - 32 = 0$$

### TRABAJANDO EN CLASES

- Si:  $(2a + b)x^2 - 6x + 1 = 6x^2 - (4a - b)x + 1$ , el valor de  $a + b$  es:  
 A)7 B)6 C)5  
**D)4** E)3
- Siendo:  $P(x) = 45x^5 - 2x^{p+1} - x^{q+2} + 3x^2 + x + 1$ , un polinomio completo y ordenado, hallar el número de términos del polinomio;  $S(x) = x^{p+q} + 1 + 2x^{p+q+2} + \dots + 3x + 2$ ; es completo y ordenado.  
 A)2 B)4 C)6  
**D)8** E)1
- En el polinomio:  $P(x) = mx^2 + mx + 2$ , se verifica que:  $P(1) = 3P(-1)$ , calcula  $(m + 1)$   
 A)8 B)5 C)3  
 D)2 E)1
- Si  $P\left(\frac{ax+b}{ax-b}\right) = \frac{a}{b}x$ , calcula  $P(2) \cdot P(3) \cdot P(4) \dots P(10)$   
 A)5 B)25 C)55  
 D)35 E)45
- Determinar el residuo al dividir:  

$$\frac{6x^4 - x^3 + x^2 - 5x + 1}{2x - 1}$$
  
 A)3 B)-2 C)-4  
 D)5 **E)-1**
- Encontrar el residuo al dividir  $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$   
 A)16 B)56 C)-2  
 D)24 E)-8
- Dividir  $(x^5 - 32) : (x - 2)$  y determinar el residuo.  
**A)0** B)2 C)-8  
 D)4 E)-16
- Hallar el residuo al dividir:



$$\frac{8x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 7x + 1}{4x^2 + x - 2}$$

- A)  $(5x+2)$       B)  $(x-12)$   
 C)  $(4x+6) + 2x+12$   
 D)  $(2x+1)$       E)  $(6x-1)$

9. Dividir:  $P(x) = 2x^5 + 2x^3 - x - 8$  y  $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$ . Hallar el residuo.

- A)  $(x-6)$       B)  $(10x+3)$       C)  $(10x-16)$   
 D)  $(3x-10)$       E)  $(5x+10)$

10. Si la división es exacta, Hallar: "m + n":

$$\frac{4x^4 + 2x^3 - mx^2 + 3x + n}{x^2 - 2x + 1}$$

- A) 15    B) 18    C) 13    D) 14    E) 16

### TAREA DOMICILIARIA

1. Al efectuar la división:

$$\frac{3x^5 - 2x^4 - 3x^3 + mx^2 + nx + p}{3x^3 - 2x^2 + 1}$$

Se obtiene como residuo:  $2x^2 + x - 5$

Hallar: m + n + p

- A) 1      B) 0      C) 2      D) 3      E) 4

2. Hallar el resto en:

$$\frac{3x^8 - 28x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + 3}$$

- A) 30    B) 20    C) 12    D) 10    E) 11

3. Calcular el resto de dividir:

$$\frac{2x^5 - \sqrt{2}x^4 + 5x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - 5\sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$$

- A)  $23\sqrt{5}$     B)  $22\sqrt{4}$       C)  $21\sqrt{2}$   
 D)  $29\sqrt{6}$     E)  $27\sqrt{3}$

4. Calcular el resto en:

$$\frac{(4x^7 - 2x^5 + 5)^2 + (4x^7 + 7 - 2x^5)^3 + 8}{4x^7 - 2x^5 + 8}$$

- A) 10    B) 16    C) 19    D) 12    E) 17

5. Hallar "n" si la división es exacta:

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 5x^2 + mx - n}{x^2 + x - 2}$$

- A) 11    B) 10    C) 40    D) 20    E) 30

### SEMANA 04 DE ÁLGEBRA

#### FACTORIZACIÓN

Factor significa DESCOMPONER un número o una expresión algebraica en factores (partes que se multiplican), procedimiento en el cual un polinomio es expresado como el producto de sus factores

#### Métodos de factorización

##### Método del factor común

Se aplica cuando todos los términos de un polinomio tienen variables o constantes comunes.

Factorizar:  $6x^2y - 30xy^2 + 12x^2y^2$

$$= 6xy(x - 5y + 2xy)$$

##### Método de agrupación

Se aplica cuando todos los términos de un polinomio no tienen factor común, por lo que se agrupa convenientemente aquellos que si lo tienen, para finalmente sacar el factor común.

Factorizar:  $a^2 + ab + ax + bx$

$$= a(a+b) + x(a+b) = (a+b)(a+x)$$

##### Métodos de identidades

Se usan las propiedades de productos notables para factorizar.

Factorizar:  $9x^2 - 16y^2$

$$= (9x)^2 - (4y)^2 = (3x + 4y)(3x - 4y)$$

##### Método del aspa simple

Se aplica cuando los polinomios a factorizar son de la forma:

$$P(x) = ax^{2n} + bx^n + c$$

$$P(x; y) = ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n}$$

Factorizar:  $15x^2 - 26xy + 8y^2$



$$\begin{array}{r}
 15x^2 \quad -26xy \quad +8y^2 \\
 5x \quad \quad \quad \rightarrow -2y \\
 3x \quad \quad \quad \rightarrow -4y \\
 \hline
 \end{array}
 \rightarrow \begin{array}{l}
 -6xy \\
 -20xy \\
 -26xy
 \end{array}$$

$$15x^2 - 26xy + 8y^2 = (5x-2y)(3x-4y)$$

**Método del aspa doble**

Se aplica cuando los polinomios a factorizar son de la forma:

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

Factorizar:  $6x^2 - 7xy - 20y^2 + 5x + 22y - 6$

$$\begin{array}{r}
 6x^2 \quad -7xy \quad -20y^2 \quad +5x \quad +22y \quad -6 \\
 2x \quad \quad \quad \rightarrow -5y \quad \quad \quad \rightarrow +3 \\
 3x \quad \quad \quad \rightarrow +4y \quad \quad \quad \rightarrow -2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$(2x-5y+3)(3x+4y-2)$$

**Método del aspa doble especial**

Se aplica cuando los polinomios a factorizar son de la forma:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Factorizar:  $x^4 + 2x^3 - 39x^2 - 8x + 140$

$$\begin{array}{r}
 x^4 \quad +2x^3 \quad -39x^2 \quad -8x \quad +140 \\
 x^2 \quad \quad \quad -3x \quad \quad \quad -10 \\
 x^2 \quad \quad \quad +5x \quad \quad \quad -14 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -3x^3 \quad -15x \quad +42x \\
 +5x^3 \quad -10x^2 \quad -50x \\
 -14x^2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$(x^4 - 3x - 10)(x^4 + 5x - 14)$$

$$(x - 5)(x + 2)(x + 7)(x - 2)$$

**Método de divisores binómicos**

Se utiliza para factorizar polinomios de cualquier grado, generalmente de una sola variable y, que admitan factores lineales:  $(ax \pm b)$  o  $(x \pm a)$

Reglas para calcular posibles raíces racionales de un polinomio.

$$PRR = \left( \frac{\text{Divisores del term. independiente}}{\text{Divisores del coeficient principal}} \right)$$

Factorizar:  $P(x) = x^3 + 7x^2 - 36$

$$PRR = \pm \left( \frac{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36}{1} \right)$$

$$PRR = \pm \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$$

Para:  $x = 2, P(x) = 0$ , entonces un factor será:  $(x-2)$

Luego aplicamos Ruffini para encontrar los factores que faltan.

Completamos el polinomio:

$$P(x) = 1x^3 + 7x^2 + 0x - 36$$

	1	7	0	-36
x=2		2	18	+36
	1	9	18	0
Factor:	$x^2$	$+9x$	$+18$	

$$P(x) = (x-2)(x^2 + 9x + 18) = (x-2)(x+3)(x+6)$$

**TRABAJANDO EN CLASES**

- Factoriza:  $8r^2 - 2r - 3$   
 A) r      B)  $2(r-1)$       C)  $(4r - 3)$   
 D)  $(2r + 1)$       **E)  $(4r - 3)(2r + 1)$**
- Un factor primo de:  $m^3 - mn^2 + m^2n - n^3 + m^2 - n^2$   
 A)  $m + n + 2$       B)  $m+1$       C)  $n-1$   
**D)  $m+n$**       E)  $m-n+1$
- Factoriza:  $m^{n+p} + m^n n^p + m^m m^p + n^{m+p}$ ; y da un factor primo:  
 A)  $m^n + p^n$       B)  $m^n + n^p$       C)  $m^p + n^m$   
 D)  $m^p + n^n$       **E)  $m^p + n^p$**
- Factorizar:  $x^3 + x^2 + x + 1$   
 A)  $(x^2 + 1)(x - 1)$       **B)  $(x^2 + 1)(x + 1)$**   
 C)  $(x^2 + 1)(1 - x)$       D)  $(1 + x)(1 - x^2)$   
 E)  $(1 + x)(1 + x^2)$
- Indica el total de factores de:  $x^4 - 13x^2 + 36$   
**A) 4**      B) 8      C) 16  
 D) 32      E) 44
- Cuántos factores primos presenta:  
 $x^{16} + 15x^8 - 16$   
 A) 4      B) 6      **C) 5**  
 D) 9      E) más de 9.
- Factoriza:  $(x) = (x^2+6)^2 + 3x(x^2+6) - 10x^2$ ; El factor primo cuadrático es:  
**A)  $x^2+2x+6$**       B)  $x^2-2x+6$       C)  $x^2+5x+6$   
 D)  $x^2-5x+6$       E)  $x^2+3$

8. Luego de factorizar:  
 $P(x) = x^8 + x^4 + 1$ ; halle la suma de los factores primos.

A)  $x^4 + x^2 + 3$     B)  $x^2 - 3$     C)  $x^2 + 3$   
 D)  $x^4 + 2$     E)  $x^4 - 1$

9. Luego de factorizar  
 $P(x) = x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$   
 indique el número de factores primos.

A) 5    B) 3    **C) 4**  
 D) 6    E) 2

10. Factorizar:  $P(x) = x^6 - x^4 + 2x^2 - 1$  indicar la suma de coeficientes de un factor primo.

A) -1    B) 0    **C) 1**  
 D) 2    E) -2

#### TAREA DOMICILIARIA

11. Factorizar:  
 $F(x) = abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab$ , e indicar la suma de los T.I. de los factores primos.

A) **a+b**    B) a-b    C) a  
 D) b    E) ab

12. Al factorizar:  
 $P(x) = 10x^2 - 17xy + 3y^2 + 5x - y$   
 Indicar la suma de sus términos de sus factores primos.

A) **7x - 4y + 1**    B) 7x-1    C) 4x-7y-1  
 D) 4y-1    E) 5x+2y-1

13. Factorizar:  $P(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$ , e Indicar un factor primo lineal.

A) **3x + 2**    B) -3x-1    C) -2x+1  
 D) x+2    E) 4x+3

14. Factorice:  
 $P(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4$   
 Indique el promedio aritmético de los T.I. de los factores primos.

A)  $\frac{4}{3}$     B)  $\frac{6}{5}$     C)  $\frac{1}{4}$   
 D)  $\frac{3}{2}$     **E)  $\frac{2}{3}$**

15. Factoriza:  $F(x, y) = 3x^2 + 7xy + 2y^2 + 11x + 7y + 6$ ; Entonces un factor primo es:

A)  $3x+2y+1$     B)  $x+3y+2$     C)  $3x+2y+2$   
**D)  $x+2y+3$**     E)  $x+y+6$

#### SEMANA 05 DE ÁLGEBRA

#### ECUACIONES

##### DEFINICIÓN

Se llama ecuación a una igualdad del primer miembro con el segundo miembro donde lo que se busca es el valor de la incógnita.

Para operar se considera que en el primer miembro deben estar todos los coeficientes con variables, pero si en el segundo miembro existe coeficientes con variables, se hace la transposición de términos, de tal manera que vienen al primer miembro cambiando de signo, si es positivo se cambiara a negativo y viceversa.

##### ECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO

Es aquella ecuación que posee una incógnita, es decir, tiene una sola raíz real. La forma es:  
 $ax \pm b = 0$

Resolver:  $x + \sqrt{x^2 - 21} = 7$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 - 21})^2 &= (7 - x)^2 \\ x^2 - 21 &= 49 - 14x + x^2 \\ 14x &= 28 \rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

##### ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO.

Es aquella ecuación que tiene dos incógnitas, es decir, posee dos raíces reales. La forma es:  
 $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

##### Métodos de solución

##### Método del Aspa simple

Este método se basa en el teorema:  $a \cdot b = 0$ .  
 Donde  $a = 0 \vee b = 0$ .

Resolver:  $x^2 - 5x - 24 = 0$

$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad -5x \quad -24 \quad = 0 \\
 x \quad \quad \quad -8 \quad \rightarrow -8x \\
 x \quad \quad \quad +3 \quad \rightarrow +3x \\
 \hline
 (x-8)(x+3) = 0 \quad -5x \\
 x - 8 = 0 \rightarrow x = 8 \\
 x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \\
 \text{C.S.} = \{-3; 8\}
 \end{array}$$

**Método de Completar cuadrados**

Este método se basa en la aplicación de la propiedad:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Resolver:  $x^2 + 6x - 16 = 0$

$$[(x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2] - (3)^2 - 16 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 25 \rightarrow x + 3 = \pm 5$$

$$x + 3 = 5 \rightarrow x = 2$$

$$x + 3 = -5 \rightarrow x = -8$$

$$\text{C.S.} = \{-8; 2\}$$

**Por medio de la Fórmula general:**

Dada:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resolver:  $x^2 - 4x - 21 = 0$

$$a = 1 \wedge b = -4 \wedge c = -21$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-21)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2}$$

$$x = \begin{cases} \frac{4 + 10}{2} = 7 \\ \frac{4 - 10}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\text{C.S.} = \{-3; 7\}$$

**Propiedades de la raíces de una ecuación cuadrática**

Dada:  $ax^2 + bx + c = 0$

Suma de raíces :  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

Producto de raíces :  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Diferencia de raíces:  $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$

Si las raíces son simétricas:  $x_1 + x_2 = 0$

Si las raíces son recíprocas:  $x_1 \cdot x_2 = 1$

Si las ecuaciones tienen las mismas raíces:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$mx^2 + nx + p = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

**Estudio de la Discriminante ( $\Delta$ )**

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Se le llama discriminante a la expresión:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si:  $\Delta > 0 \rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  y  $x_1 \neq x_2$

Si:  $\Delta = 0 \rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  y  $x_1 = x_2$

Si:  $\Delta < 0 \rightarrow x_1, x_2$  son n° complejos y  $x_1 \neq x_2$

**ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR**

Son aquellas ecuaciones que presentan más de dos incógnitas o raíces reales. Para el desarrollo de la misma se utiliza por lo general el método de factorización.

Forma:  $ax^n + bx^{n-1} + \dots + px^2 + qx + r = 0$

Resolver:  $x^3 + 7x^2 - 36 = 0$

$$x^3 + 6x^2 + x^2 - 36 = 0$$

$$x^2(x + 6) + (x + 6)(x - 6) = 0$$

$$(x + 6)[x^2 + x - 6] = 0$$

$$(x + 6)(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x = -6 \wedge x = -3 \wedge x = 2$$

$$\text{C.S.} = \{-6; -3; 2\}$$

**CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS:**

**1. ECUACION RACIONALES:** Son aquellas cuando sus incógnitas no están afectadas de radicales.

**2.-ECUACION IRRACIONALES:** Es aquella cuando al menos una de sus incógnitas está afectada de radical.

2.1 Ecuaciones compatibles: cuando tiene solución a su vez puede ser:

2.1.1. Compatibles determinados: cuando el número de raíces es limitado

2.1.2 Compatibles indeterminados: Cuando el número de raíces es ilimitado

2.2 Ecuaciones Incompatibles o absurdas: son aquellas cuando se tienen solución

**TRABAJANDO EN CLASES**

1. Indique una solución de la ecuación.

$$9x^4 - 7x^2 - 2 = 0$$

A) -9

B) -2

C) -1

D) 3

E) -3

2. Resolver:



- $\sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{2x^2 + 8x + 12}$
- A)  $x = 2$                       B)  $x = 1$                       **C)  $x = -2$**   
 D)  $x = 3$                       E)  $x = 0$
3. Resolver:  $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \infty}}}$   
 A) 1,-2                      B) -1,4                      **C) -1,2**  
 D) 2,4                      E) 1,-4
4. Calcular la suma de las raíces de:  
 $\sqrt{x^2 - 5x + 1} + x^2 - 5x = 1$   
 A) 0                      B) 1                      C) 2  
**D) 5**                      E) 6
5. Calcular el valor de "x" en:  $6x(2x - 1) - 4x(3x + 2) = 8(x + 5) + 4$   
 A) -11                      B) -3                      **C) -2**  
 D) 1                      E) 8
6. Si en la ecuación:  $x^2 - 5ax + 3a = 0$ ; una de las raíces es 2. Indicar el valor que adopta "a".  
 A) -5                      B) 5                      C) -4/3  
**D) 4/7**                      E) -4/7
7. Si una de las raíces de la ecuación:  $x^2 + (a + 3)x + a + 2 = 0$  es (-6), entonces la otra raíz es:  
 A) -2                      **B) -1**                      C) -3  
 D) -4                      E) 1.
8. Hallar "k", si la suma de raíces de la ecuación es 20.  
 $(k - 3)x^2 - (k + 4)x + 30 = 0$   
 A)  $\frac{64}{3}$                       B)  $\frac{67}{9}$                       C)  $\frac{19}{64}$   
**D)  $\frac{64}{19}$**                       E)  $-\frac{19}{64}$
9. Si en la ecuación:  $x^2 - 5ax + 3a = 0$ ; una de las raíces es 2. Indicar el valor que adopta "a".  
 A) -5                      B) 5                      C) -4/3  
**D) 4/7**                      E) -4/7
10. Al resolver en x:  $(2n-3)x + 5n(x-4) = 3$ ; se obtuvo:  $x = 3$  Halla : "n"  
 A) 7                      **B) 12**                      C) 6  
 D) 8                      E) -6
11. Calcular "α" en: Si:  $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$   
 $\alpha x^2 - (3\alpha - 11)x + 1 = 0$   
 A) 2                      B) 8                      **C) 4**  
 D) 6                      E) -1
12. Calcule "k" para que la ecuación se reduzca a una de primer grado.  
 $\frac{2k - 3}{x - 1} + \frac{3kx - 2}{x + 1} = 2k + 3$   
 A) -2                      B) -3                      **C) 1**  
 D) 2                      E) 3
13. Halle  $x^2$  en :  
 $\frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 2x = x$ ;  $x \in \mathbb{C}$   
 A)  $-\frac{4}{3}$                       B)  $-\frac{3}{4}$                       **C)  $x \in \mathbb{C}$**   
 D) -3                      E) -4
14. Si a y b son las soluciones de la ecuación cuadrática  
 $x^2 - 2x + 7 = 0$   
 Calcule  $\frac{a^2 + 5}{a - 1} + \frac{b^2 + 5}{b - 1}$   
 A) 3                      B) 2                      **C) 4**  
 D) 5                      E) 7
15. Halle "k" para que la diferencia de raíces sea uno.  
 $2x^2 - (k - 1)x + (k + 1) = 0$   
 A) -2                      B) -3                      **C) 11**  
 D) 1                      E) 2

## SEGUNDA UNIDAD

### SEMANA 06 DE ÁLGEBRA

#### SISTEMA DE ECUACIONES

Es un conjunto de Ecuaciones que se verifican para una solución común, también se llama sistema de ecuaciones porque tienen dos o más ecuaciones lineales con dos o más variables.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

I. Tiene solución única si:

#### TAREA DOMICILIARIA

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

II. Tiene infinitas soluciones:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

III. No tiene solución, (inconsistente)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

### Método de Igualación

Este método consiste en despejar la misma variable en ambas ecuaciones, y con dicha variable despejada hacer la igualación de ambas ecuaciones.

Resolver:

$$5x + 2y = 39$$

$$3x - 5y = 11$$

Se despeja "y" de las ecuaciones 1 y 2:

$$y = \frac{39 - 5x}{2} \wedge y = \frac{3x - 11}{5}$$

$$\frac{39 - 5x}{2} = \frac{3x - 11}{5} \rightarrow x = 7 \wedge y = 2$$

### Método de Sustitución

Consiste en despejar una variable de una de las ecuaciones, con lo cual se sustituye en la misma variable de la otra ecuación.

Resolver:

$$2x + 5y = -24$$

$$8x - 3y = 19$$

Se despeja "y" de la ecuación 1:

$$y = \frac{-2x - 24}{5}$$

Y se reemplaza en la ecuación 2.

$$8x - 3\left(\frac{-2x - 24}{5}\right) = 19$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{2} \wedge y = -1$$

### Método de Reducción

Este método consiste en sumar ambas ecuaciones, para poder eliminar una de las variables y reducir la ecuación.

Resolver:

$$2x - 5y = -16 \leftarrow (7)$$

$$3x + 7y = 5 \leftarrow (5)$$

Se va eliminar "y"

$$14x - 35y = -112$$

$$15x + 35y = 25$$

$$29x + 0 = -87 \rightarrow x = -3 \wedge y = 2$$

### PROBLEMAS RESUELTOS

1. Resolver:  $5x - 2y = 4$  ..... (I)

$3x + y = 9$  ..... (II)

#### Solución

Si en la segunda ecuación suponemos conocida la incógnita "x", obtenemos:

$y = 9 - 3x$ ; y la solución general de esta ecuación está dada por el par  $\{x; 9 - 3x\}$ .

Si ésta fuera también solución del sistema, sustituida en la primera ecuación tendrá que verificarse la igualdad:

$$5x - 2(9 - 3x) = 4$$

Obtenemos así una ecuación de primer grado con una incógnita, que podemos resolver fácilmente:

$$5x - 18 + 6x = 4$$

$$11x = 22$$

$$x = 2$$

Si ahora sustituimos el valor de "x" en [II], podemos hallar el correspondiente valor de "y".

$$y = 9 - 3[2] = 9 - 6 = 3$$

La solución del sistema vendrá dada por el par  $\{2; 3\}$ .

2. Resolver el siguiente sistema:

$$x + 3y = 10 \quad \text{..... (1)}$$

$$2x + 5/4y = 1 \quad \text{..... (2)}$$

#### Solución

Al aplicar este método también conviene observar cuál es la incógnita que más fácilmente se despeja en las dos ecuaciones, en este caso es "x". Se tiene así:

De (1):  $x = 10 - 3y$ ..... (3)

De (2):  $2x = 1 - 5/4y$

$$1 - \frac{5}{4}y$$

O sea:  $x = \frac{1 - \frac{5}{4}y}{2}$  ..... (4)

Iguamos los segundos miembros de (3) y (4); es decir:

$$10 - 3y = \frac{1 - \frac{5}{4}y}{2}$$

Se resuelve la ecuación en “y”, que hemos obtenido quitando el denominador 2, se tiene:

$$(10 - 3y) 2 = 1 - 5/4 y$$

Efectuando la operación indicada en el 1er término:

$$20 - 6y = 1 - 5/4 y$$

$$\text{Es decir: } -6y + 5/4 y = 1 - 20$$

$$\text{O sea: } -19/4 y = -19$$

$$\text{de donde: } -y = \frac{(-19)4}{19}$$

$$-y = -4$$

$$\text{Luego: } y = 4$$

Sustituimos “y” por su valor 4, en la expresión (3) o en la (4).

En nuestro caso es más cómodo en la (3).

Así resulta:

$$\text{Es decir: } x = 10 - 3(4)$$

$$\text{O sea: } x = 10 - 12$$

$$x = -2$$

$$\text{Luego la solución es: } \{-2 ; 4\}$$

3. Resolver:

$$2x - 3y = 5$$

$$3x + 4y = 7$$

Resolución:

Para eliminar “y”, basta multiplicar la primera ecuación por 4 y la segunda por 3, y sumar ordenadamente:

$$\begin{array}{l} 4 \cdot (2x - 3y = 5) \\ 3 \cdot (3x + 4y = 7) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 12y = 20 \\ 9x + 12y = 21 \end{cases}$$

$$\hline 17x = 41$$

$$x = 41/17$$

Para eliminar “x”, podemos multiplicar la primera ecuación por -3 y la segunda por 2, y como tiene igual signo, cambiamos de signo a todos los términos de la primera:

$$y = -1/17; \text{ la solución es: } \left\{ \frac{41}{17}; -\frac{1}{17} \right\}$$

4. El sistema lineal

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 13 \end{cases}$$

Se tiene:  $\frac{3}{5} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow$  el sistema tiene solución única.

5. El sistema lineal

$$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 8x - 10y = 7 \end{cases}$$

Se tiene:  $\frac{4}{8} = \frac{-5}{-10} \neq \frac{2}{7} \Rightarrow$  el sistema lineal no tiene solución.

### TRABAJANDO EN CLASES

1. Resolver:

$$x + y = 5$$

$$x - y = 7$$

Indicar:  $3x - y$

A) 18

**B) 19**

C) 17

D) 20

E) 5

2. Resolver:

$$x + y = 8$$

$$x - y = 10$$

Indicar el valor de “y”

A) 9

B) 8

C)

18

D) 1

**E) -**

**1**

3. Resolver:

$$2x + y = 3$$

$$y + x = 2$$

Indicar:  $E = x - y$

A) 1

B) 2

C) 3

**D) 0**

E) -1

4. Resolver:

$$3x + 2y = 5$$

$$2x + 3y = 5$$

Indicar el valor de:  $E = \frac{x}{y}$

A) 2

B) 5

C) 3

**D) 1**

E) 0

5. Resolver:

$$5x + 7y = 17$$

$$2x + y = 5$$

Indicar:  $3x + 6y$

A) 3

B) 6

C) 8

**D) 12**

E) -2

6. Resolver:

$$17x + 2y = 36$$

$$x + y = 3$$

Hallar:  $x - y$

- A) 0                    **B) 1**                    C) 2  
D) -1                    E) 4
7. Resolver el sistema:  
 $3x + 2y = 7$   
 $2x + y = 5$
- Hallar “y”
- A) -1** B) 2/7 C) 3/7 D) 4/7 E) 5/7

8. Determinar “x” en el sistema
- $$\frac{x}{n} + y = 2m$$
- $$\frac{x}{m} - y = n - m$$
- A) m.n**                    B) m                    C) n  
D) 4m                    E) 5n

9. Resolver el sistema:
- $$\frac{3x}{5} + \frac{y}{4} = 2$$
- $$x - 5y = 25$$
- A) 5 y -8    **B) 5 y -4**    C) 5 y -2  
D) 5 y -1    E) 5 y -3

10. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.
- $$2y^2 - 3x^2 = 6$$
- $$5y^2 + 2x^2 = 53$$
- A) x = 8 ; y = 4    B) x = -8 ; y = -4  
**C) x = 2 ; y = 3**    D) x = 18 ; y = 14  
E) x = -2 ; y = -4

### TAREA DOMICILIARIA

11. Resolver :
- $$5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3 \dots\dots I$$
- $$25x - 9y = 81 \dots\dots II$$
- A) x =9, y =14    B) x =9, y =13  
C) x =9, y =10    D) x =9, y =12  
**E) x =9, y =16**
12. Halla el valor de x+y+z en:

$$x - y + z = 7$$

$$x + z = 4$$

$$y - 3z = -15$$

- A) 8                    B) 7                    **C) 1**  
D) 5                    E) 4
13. Resolver
- $$x - \sqrt{y} = 14$$
- $$x + y = 20$$

E Indicar: x/y

- A) 5                    **B) 4**                    C) -2  
D) -1                    E) -3
14. Si el sistema:
- $$ax + 3by = c$$
- $$3x + 2y = \frac{3}{a}$$
- Es indeterminado indicar el valor de “c”.
- A) 3    B) 4    C) 6    **D) 1**    E) 2

15. Al resolver:
- $$ax + by = 2$$
- $$bx + ay = 4$$
- Indicar el valor de “y” siendo (b≠a)
- A)  $\frac{2(b-2a)}{b-a}$     B)  $\frac{b-2a}{b^2-a}$     C)  $\frac{2(b-2a)}{b^2-a}$   
D) 1                    E)  $\frac{2(b-2a)}{b^2-a^2}$

### SEMANA 07 DE ÁLGEBRA

#### INECUACIONES

##### **Definición**

Desigualdad entre dos expresiones algebraicas de una o varias incógnitas, que solo se verifica para ciertos valores de esas incógnitas; se expresa con los signos  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  o  $\leq$ .

Para considerar el sombreado de los intervalos, así como la condición de ser abierto o cerrado de cada raíz que se obtiene de los factores de una inecuación, se tiene lo siguiente:

Se sombrea:

Solo (+)                    Solo (-)

$$Q(x) \begin{cases} > 0 \\ \geq 0 \end{cases} \quad Q(x) \begin{cases} < 0 \\ \leq 0 \end{cases}$$

Condición:

Abiertos                      Cerrados

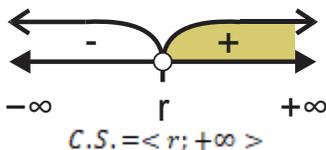
$$Q(x) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \quad Q(x) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$$

**INECUACIÓN LINEAL**

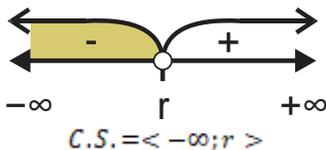
Forma:  $ax + b \Delta 0$

$$r = -\frac{b}{a}$$

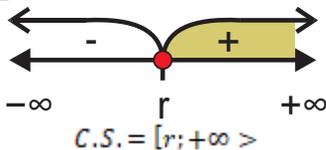
$ax + b > 0$



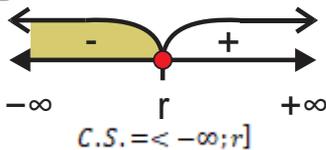
$ax + b < 0$



$ax + b \geq 0$



$ax + b \leq 0$



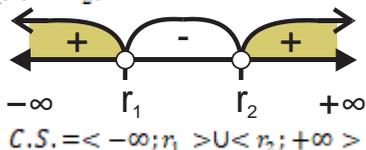
**INECUACIÓN CUADRÁTICA**

Forma:  $ax^2 + bx + c \Delta 0$

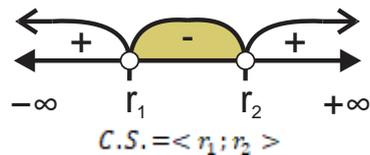
Factorizado:  $(x - r_1)(x - r_2) \Delta 0$

$r_1 < r_2$

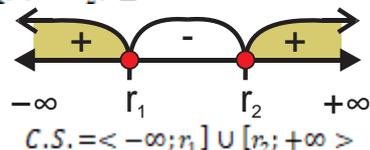
$(x - r_1)(x - r_2) > 0$



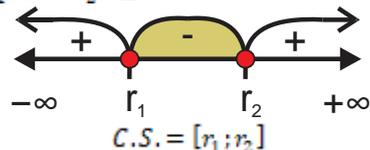
$(x - r_1)(x - r_2) < 0$



$(x - r_1)(x - r_2) \geq 0$



$(x - r_1)(x - r_2) \leq 0$



**Observaciones:**

$(mx + n)^2 \geq 0 \rightarrow C.S. = \mathbb{R}$

$(mx + n)^2 > 0 \rightarrow C.S. = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$

$(mx + n)^2 \leq 0 \rightarrow C.S. = \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$

$(mx + n)^2 < 0 \rightarrow C.S. = \emptyset$

**INECUACIÓN DE GRADO SUPERIOR**

Forma:

$mx^n + \dots + ax^2 + bx + c \Delta 0$

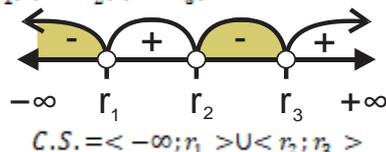
Factorizado:

$(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n) \Delta 0$

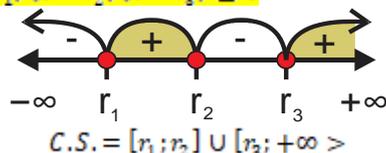
$r_1 < r_2 < \dots < r_n$

$ax^3 + bx^2 + cx + d < 0$

$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) < 0$



$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \geq 0$



**INECUACIÓN FRACCIONARIA**

Forma:  $\frac{Q(x)}{R(x)} \Delta 0$

$\frac{(x - r_1)(x - r_2)}{(x - r_3)} \leq 0$

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \leq 0$$

$C.S. = \langle -\infty; r_1 \rangle \cup [r_2; r_3 >$

$$\frac{(x - r_1)(x - r_3)}{(x - r_2)} > 0$$

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) > 0$$

$C.S. = \langle r_1; r_2 > \cup \langle r_3; +\infty >$

### INECUACIÓN IRRACIONAL

Teorema 1:

$$\text{Si } x; y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \leq y \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq y^2$$

Teorema 2:

$$\forall y < 0, \sqrt{x} \geq y \Leftrightarrow x \geq 0$$

Teorema 3:

$$\forall y \geq 0, \sqrt{x} \geq y \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \geq y^2$$

### EJEMPLOS:

1. Resuelve:  $2x + 5 > 11$

Solución

$$2x - 6 > 0$$

$$x - 3 > 0$$

$C.S. = \langle 3; +\infty >$

2. Resuelve:

$$(x - 2)^2 \geq 4(20 - x)$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 20 - 4x$$

$$x^2 - 16 \geq 0$$

$$(x + 4)(x - 4) \geq 0$$

$C.S. = \langle -\infty; -4 \rangle \cup [4; +\infty >$

3. Resuelve:

$$x^3 - x^2 - 14x + 12 < -12$$

Solución

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 < 0$$

$$x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 8x - 6x + 24 < 0$$

$$x(x^2 + 2x - 8) - 3(x^2 + 2x - 8) < 0$$

$$(x^3 + 2x^2 - 8x)(x - 3) < 0$$

$$(x + 4)(x - 2)(x - 3) < 0$$

$C.S. = \langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle 2; 3 >$

4. Resuelve:

$$\frac{x}{x-3} \leq \frac{2x}{x+1}$$

Solución

$$\frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{x-3}{x+1} - \frac{2(x-3)}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{7-x} \leq 0$$

$$\frac{x-7}{(x-3)(x+1)} \geq 0$$

$C.S. = \langle -1; 3 > \cup [7; +\infty >$

5. Resuelve:

$$\sqrt{x^2 - 16} < 3$$

Solución

$$x^2 - 16 \geq 0$$

$$(x + 4)(x - 4) \geq 0$$

$$S_1 = \langle -\infty; -4 \rangle \cup [4; +\infty >$$

$$x^2 - 16 < 3^2$$

$$x^2 - 25 < 0$$

$$(x + 5)(x - 5) < 0$$

$$S_2 = \langle -5; 5 >$$

$C.S. = S_1 \cap S_2 = \langle -5; -4 \rangle \cup [4; 5 >$

### TRABAJANDO EN CLASES

1. Resolver:

$$x - \frac{x+1}{5} \geq \frac{x+3}{2} - 2$$

1. Resolver:  $x - \frac{3-x}{3} < \frac{3x}{2} - \frac{8-3x}{4}$
- A)  $[-1; -\infty>$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $<2; +\infty>$
2. Resolver:  $x - \frac{3-x}{3} < \frac{3x}{2} - \frac{8-3x}{4}$
- A)  $<-2; 1>$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $<12/11; +\infty>$
3. Resolver:
- $$11 - \frac{3x}{2} < \frac{5x+14}{3} > \frac{9}{5}(2+x)$$
- A)  $<-2; 1>$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $<2; 8>$
4. Resolver:  $x^2 - 5x \geq 0$
- A)  $<-\infty; 0] \cup [5; +\infty>$  B)  $<5; -\infty>$   
 C)  $<4; +\infty>$  D)  $<4; -\infty>$  E)  $<2; +\infty>$
5. Resolver:  $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
- A)  $[-3; 1/2]$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $<2; +\infty>$
6. Resolver:
- $$5x - 2 < 10x + 8 < 2x + 16$$
- A)  $<-2; 1>$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $<2; +\infty>$
7. Resolver:  $-\frac{1}{5} \leq 3x - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}$
- A)  $[1/60; 7/36]$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $<2; +\infty>$
8. Resolver:
- $$\frac{x}{a^2 - b^2} + \frac{3x}{a+b} \leq \frac{5}{a-b}$$
- A)  $[-\infty; 5a+5b / 1+3a-3b]$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $<2; +\infty>$

9. Resolver:  $\frac{2x}{3a} + 4 \geq \frac{5x}{6b} + 2x,$

- A)  $[-\infty; 24ab / 5a + 12ab - 4b]$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$  D)  $<4; -\infty>$   
 E)  $<2; +\infty>$

10. Resolver:  $2x + \frac{6-3x}{4} < 4$

- A)  $<-\infty; 2>$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $<2; +\infty>$

### TAREA DOMICILIARIA

11. Resolver:  $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} \geq 1 + \frac{x}{c}$

- A)  $<-\infty; 2>$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $[abc / ac+bc-ab; +\infty]$

12. Resolver:  $2x - 6 < \frac{3x+8}{5}$

- A)  $<-\infty; 38/7>$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<4; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $<2; +\infty>$

13. Resolver

$$3(x-5) - 4(4-3x) \geq 2(7-x) - 3(x-5)$$

- A)  $<-\infty; 2>$  B)  $<5; -\infty>$  C)  $<3; +\infty>$   
 D)  $<4; -\infty>$  E)  $<2; +\infty>$

14. Resolver:  $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{3} \geq 6$

Indicando el intervalo solución.

- A)  $x \in \mathbb{R}$  B)  $x \in \emptyset$  C)  $[1; +\infty>$  D)  $[7; +\infty>$   
 E)  $<4; +\infty>$

15. ¿Cuál es el mayor número entero de "x" que verifica:

$$\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$$

- A) -2 B) -1 C) 0  
 D) 1 E) 2

### SEMANA 08 DE ÁLGEBRA

#### PRODUCTOS NOTABLES

I. **DEFINICIÓN:** Se denomina productos notables a la aplicación de fórmulas rápidas que permiten encontrar un resultado inmediato, que se obtiene sin afectar el proceso de la multiplicación.

## II. PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES:

### 1) Binomio Al Cuadrado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2.ab + b^2$$

**Ejemplo:**

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2.x.3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2.ab + b^2$$

**Ejemplo:**

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2.2x.3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

### 2) Diferencia De Cuadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

**Ejemplo:**

$$(2x + 5)(2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$$

### 3) Identidades De Legendre

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

**Ejemplo:**

$$(x + 5)^2 + (x - 5)^2 = 2(x^2 + 5^2) = 2(x^2 + 25)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

**Ejemplo:**

$$(x + 5)^2 - (x - 5)^2 = 4(x)(5) = 20x$$

### 4) Binomio Al Cubo

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

También:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

**Ejemplo:**

$$(x + 3)^3 = x^3 + 3.x^2.3 + 3.x.3^2 + 3^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

También:

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

**Ejemplo:**

$$(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3.(2x)^2.3 + 3.2x.3^2 - 3^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

### 5) Binomio Por Trinomio

$$(a + b)[a^2 - ab + b^2] = a^3 + b^3$$

$$(a - b)[a^2 + ab + b^2] = a^3 - b^3$$

**Ejemplo:**

$$(x + 6)(x^2 - 6x + 6^2) = x^3 + 6^3$$

$$(x - 6)(x^2 + 6x + 6^2) = x^3 - 6^3$$

### 6) Trinomio Al Cuadrado

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad \text{Ejempl}$$

**o:**

$$(x + 2 + y)^2 = x^2 + 2^2 + y^2 + 2.x.2 + 2.x.y + 2.2.y = x^2 + 4 + y^2 + 4x + 2xy + 4y$$

### 7) Trinomio Al Cubo

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

### 8) Identidad Trinómica De Argand

$$(a^2 + b + 1)(a^2 - b + 1) = a^4 + b^2 + 1$$

$$(a^4 + b^2 + 1)(a^4 - b^2 + 1) = a^8 + b^4 + 1$$

### 9) Identidad De Lagrange

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si:  $x + \frac{1}{x} = 4$  Calcular:  $x^3 + \frac{1}{x^3}$   
A) 40 B) 50 C) 52 D) 49 E) 51

**Solución:**

$$\text{Si: } x + \frac{1}{x} = 4 \rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 4^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 64$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(4) = 64$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 52$$

2. Reducir:  $\frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{a^3 + 3ab^2}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**Solución**

$$\frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{a^3 + 3ab^2} = \frac{2a(a^2 + 3b^2)}{a(a^2 + 3b^2)} = 2$$

3. Calcular:  $E = (\sqrt{5} + 1)^5$

- A)  $176 + \sqrt{5}$  B)  $176 + 80\sqrt{5}$   
C) 176 D) 80 E)  $176 - \sqrt{5}$

**Solución**

$$E = (\sqrt{5} + 1)^3 \cdot (\sqrt{5} + 1)^2$$

$$E = (\sqrt{5}^3 + 3\sqrt{5}^2 + 3\sqrt{5} + 1^3)(\sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5} + 1)$$

$$E = (5\sqrt{5} + 15 + 3\sqrt{5} + 1)(5 + 2\sqrt{5} + 1)$$

$$E = (8\sqrt{5})(2\sqrt{5}) + (8\sqrt{5})(6) + 16(2\sqrt{5}) + 16(6)$$

$$E = 80 + 48\sqrt{5} + 32\sqrt{5} + 96$$

$$E = 176 + 80\sqrt{5}$$

4. Efectuar:  $24(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1)$   
 A)  $5^{18} + 1$     B)  $5^{18} - 1$     C)  $5^{16} - 1$   
 D)  $5^{16} + 1$     E)  $5^{16}$

**Solución**

$$(5^2 - 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1)$$

$$\left[ (5^2)^2 - 1 \right] (5^4 + 1)(5^8 + 1)$$

$$(5^4 - 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1)$$

$$\left[ (5^4)^2 - 1 \right] (5^8 + 1)$$

$$(5^8 - 1)(5^8 + 1)$$

$$(5^8)^2 - 1 = 5^{16} - 1$$

5. Reducir:

$$k = \frac{(a+3)^2 - (a-3)^2}{6a} + \frac{(x+2)^2 + (x-2)^2}{x^2 + 4}$$

A) 6    B) 1    C) 2    D) 3    E) 4

**Solución**

$$k = \frac{(a+3)^2 - (a-3)^2}{6a} + \frac{(x+2)^2 + (x-2)^2}{x^2 + 4}$$

Por propiedad:

$$k = \frac{4(a)(3)}{6a} + \frac{2(x^2 + 2^2)}{x^2 + 4}$$

$$k = 4 + 2 = 6$$

**TRABAJANDO EN CLASES**

1. Si  $x - \frac{1}{x} = 1$ , calcula

$$A = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

- A) 5    B) 12    C) 7  
 D) 8    E) 9

2. Ejecutar:

$$A = \frac{(x - y + z)^2 + (x + y - z)^2}{x^2 + (y - z)^2}$$

- A) 0    B) 1    C) 2  
 D) 3    E) 4

3. Simplificar:

$$A = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}$$

- A) 0    B) 1    C) 1/2  
 D) 1/3    E) 1/5

4. Si:  $a + b + c = 2x$ ; calcula

$$A = (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2 + x^2.$$

- A)  $b^2 + c^2$     B)  $a^2 + b^2 + c^2$     C)  $c^2$   
 D)  $a + b + c$  E)  $a$

5. Efectúe:

$$\left(\sqrt[3]{5} + 1\right)\left(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} + 1\right) + \left(\sqrt{5} + 1\right)\left(1 - \sqrt{5}\right)$$

- A) 3    B) 2    C) 1  
 D) 0    E) 4

6. Si  $a + b = ab = 5$ .

$$\text{Calcular } S = \frac{a^2 + b^2 + 5}{a^3 + b^3 + 10}$$

- A) 1/2    B) 2/5    C) 1/5  
 D) 1/3    E) 5/3

7. Halla el valor de

$$\sqrt[64]{3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) + 1}$$

- A) 1    B) 2    C) 3  
 D) 4    E) 5

8. Calcular  $2A - 3B$ , donde

$$A = (x - 3y)^2 + 4xy$$

$$B = (2x + y)^2 - xy$$

- A)  $-10x^2 - 13xy + 15y^2$     B) 1  
 C) 3    D)  $5x + 1$   
 E)  $7x^2 + 2xy - 2$

9. Calcular "n + k" si el cociente notable de:

$$\frac{x^n - y^k}{x^3 - y^4} \text{ Tiene 12 términos}$$

- A) 82    B) 55    C) 13  
 D) 69    E) 84

10. A continuación se muestran tres términos consecutivos de un cociente notable

$$\dots + x^{91}y^{54} + T + x^{103}y^{42} + \dots$$

Determinar el grado absoluto del término T.

- A) 154                      B) 213    **C) 145**  
D) 602                      E) 404

**TAREA DOMICILIARIA**

11. Luego de reducir:

$$F = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)}$$

Se obtiene:

- A) 1                      B) 2                      C) 1/(a+x)  
D) 6/a<sup>x</sup>                **E) 1/(a-x)**

12. Para qué valor de "n" el producto de los términos de lugar 10, 50 y 100 del cociente

notable originado al dividir  $\frac{x^n - 1}{x - 1}$  es

idéntico a  $x^{236}$ .

- A) 182                      **B) 132**                C) 113  
D) 60                      E) 48

13. Resolver el sistema:

$$3x + 2y = 7$$

$$2x + y = 5$$

Hallar "y"

- A) -1**    B) 2/7    C) 3/7    D) 4/7    E) 5/7

14. Determinar "x" en el sistema

$$\frac{x}{n} + y = 2m$$

$$\frac{x}{m} - y = n - m$$

- A) m.n**                      B) m                      C) n  
D) 4m                      E) 5n

15. Resolver el sistema:

$$\frac{3x}{5} + \frac{y}{4} = 2$$

$$x - 5y = 25$$

- A) 5 y -8                      **B) 5 y -4**                C) 5 y -2  
D) 5 y -1                      E) 5 y -3

**SEMANA 09 DE ÁLGEBRA****FUNCIONES****Definición**

Se le denomina función a una regla de correspondencia o relación entre dos sucesos o entre los elementos de dos conjuntos; formado de esta manera un conjunto de pares ordenados.

**Cálculo del Dominio y Rango de una función**

En una función  $f$  real de variable real, si  $(x; y) \in f$ , su regla de correspondencia es  $y = f(x)$ , consideremos lo siguiente:

- Calcular el Dominio de la función consiste en encontrar todos los valores reales de "x" para que la función esté bien definida en los reales.
- Calcular el Rango de la función consiste en encontrar todos los valores reales de "y" o "f(x)" a partir del Dominio.

**FUNCIÓN LINEAL**

$$f(x) = ax + b; a \neq 0$$

Sin Dominio restringido:

$$\text{Se tiene } f(x) = ax + b$$

Entonces:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran } f = \mathbb{R}$$

Con Dominio restringido:

Depende del intervalo

$$\text{Se tiene } f(x) = ax + b$$

$$\text{Si } x \in \langle m; n ]$$

Para el cálculo del Rango

$$\text{De: } m < x \leq n$$

$$\text{hasta: } p < ax + b \leq q, \text{ Si } a > 0$$

$$\text{hasta: } q \leq ax + b < p, \text{ Si } a < 0$$

Entonces:

$$\text{Dom } f = \langle m; n ]$$

$$\text{Si } a > 0 \rightarrow \text{Ran } f = \langle p; q ]$$

$$\text{Si } a < 0 \rightarrow \text{Ran } f = [q; +p >$$

**FUNCIÓN CUADRÁTICA**

$$f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$$

Sin Dominio restringido:

$$\text{Se tiene } f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para el cálculo del Rango

Se usa el vértice de una parábola

$$V(h; k), \text{ donde: } h = \frac{-b}{2a}; k = f(h)$$

Entonces:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{Si } a > 0 \rightarrow \text{Ran } f = [k; +\infty >$$

$$\text{Si } a < 0 \rightarrow \text{Ran } f = < -\infty; k]$$

Con Dominio restringido:

Depende del intervalo

$$\text{Se tiene } f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Si } x \in [m; n >$$

$$\text{Donde, } ax^2 + bx + c = (x \pm i)^2 \pm j$$

Para el cálculo del Rango

Se usa Completando cuadrados

$$\text{De: } m \leq x < n$$

hasta:

$$p \leq (x \pm i)^2 \pm j < q$$

Entonces:

$$\text{Dom } f = [m; n >$$

$$\text{Ran } f = [p; q >$$

### FUNCIÓN RACIONAL

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Sin Dominio restringido:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Para el cálculo del Dominio

$$cx + d \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{-d}{c}$$

Entonces:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$$

Para el cálculo del Rango

Se despeja "y"

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$cxy + dy = ax + b$$

$$cxy - ax = b - dy$$

$$x = \frac{b - dy}{cy - a}$$

$$cy - a \neq 0 \rightarrow y \neq \frac{a}{c}$$

Entonces:

$$\text{Ran } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

Con Dominio restringido:

Depende del intervalo

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$\text{Si } x \in < m; n >$$

Para el cálculo del Rango

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = 1 \pm \frac{r}{cx + d}$$

$$\text{De: } m < x < n$$

Se le invierte a la inecuación

$$\text{hasta: } p < 1 \pm \frac{r}{cx + d} < q$$

Entonces:

$$\text{Dom } f = < m; n >$$

$$\text{Ran } f = < p; q >$$

### FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

$$f(x) = y = \sqrt{ax - h} + k$$

Para el cálculo del Dominio

$$x - h \geq 0 \rightarrow x \geq h$$

Entonces:

$$\text{Dom } f = [h; +\infty >$$

Para el cálculo del Rango

$$\text{Si } a \geq 0 \rightarrow y \geq k$$

$$\rightarrow \text{Ran } f = [k; +\infty >$$

$$\text{Si } a < 0 \rightarrow y \leq k$$

$$\rightarrow \text{Ran } f = < -\infty; k]$$

### EJEMPLOS:

1. Calcula la suma de elementos del rango de la función:

$$f = \{(4; 3), (a; -1), (2; a^2), (7; a - 2), (2; a + 12)\}$$

#### Solución

Como f es una función, entonces:

$$(2; a^2) = (2; a + 12)$$

$$a^2 = a + 12$$

$$a^2 - a - 12 = 0$$

$$(a - 4)(a + 3) = 0$$

$$a = 4 \wedge a = -3$$

Si  $a = 4$ , el Dominio se repite en:

$$(4; 3), (4; -1)$$

→ No es una función

Si  $a = -3$ , el Dominio no se repite

→ Si es una función

$$\text{Rang } (f) = \{3; -1; 9; -5\}$$

$$\rightarrow \text{Suma} = 6$$

2. Calcular el rango de la siguiente función:

$$f(x) = -4x + 5$$

$$\text{si } x \in [-2; 3 >$$

#### Solución

Para el cálculo del Rango

$$-2 \leq x < 3 \leftarrow (-4)$$

$$-12 < -4x \leq 8 \leftarrow +5$$

$$-7 < -4x + 5 \leq 13$$

$$-7 < y \leq 13$$

$$\rightarrow \text{Ran } f = \langle -7; 13] ]$$

3. Calcular el dominio y el rango de la siguiente función:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

### Solución

El dominio es:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

Para el cálculo del Rango

$$-2x^2 + 12x + 1 = ax^2 + bx + c$$

$$\text{donde: } a = -2; b = 12; c = 1$$

$$h = \frac{-12}{2(-2)} = 3$$

$$k = f(3) = -2(3)^2 + 12(3) + 1 = 19$$

$$\text{como } a < 0 \rightarrow \text{Ran } f = \langle -\infty; 19]$$

4. Calcular el rango de la siguiente función:

$$f(x) = x^2 - 4x - 6$$

$$\text{si } x \in \langle -3; 1]$$

### Solución

Para el cálculo del Rango

Completando cuadrados

$$\text{como: } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$y = x^2 - 2(x)(2) + 2^2 - 2^2 - 6$$

$$y = (x - 2)^2 - 4 - 6$$

$$y = (x - 2)^2 - 10$$

$$\text{Luego de } x \in \langle -3; 1]$$

$$-3 < x \leq 1 \leftarrow -2$$

$$-5 < x - 2 \leq -1 \leftarrow ( )^2$$

$$1 \leq (x - 2)^2 < 25 \leftarrow -10$$

$$-9 \leq (x - 2)^2 - 10 < 15$$

$$-9 \leq y < 15$$

$$\rightarrow \text{Ran } f = [-9; 15 >$$

5. Calcular el dominio y el rango de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{3x - 4}{2x + 6}$$

### Solución

Para el cálculo del Dominio

El denominador siempre tiene que ser diferente de cero (0).

$$2x + 6 \neq 0$$

$$x \neq -3$$

$$\rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

Para el cálculo del Rango

$$y = \frac{3x - 4}{2x + 6}$$

$$2xy + 6y = 3x - 4$$

$$2xy - 3x = -4 - 6y$$

$$x = \frac{4 + 6y}{2y - 3}$$

$$2y - 3 \neq 0 \rightarrow y \neq \frac{3}{2}$$

Entonces:

$$\text{Ran } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

### TRABAJANDO EN CLASES

1. Halle el dominio de  $f_{(x)} = \sqrt{2^2 - x^2}$

A)  $\mathbb{R}$       B)  $\{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x \leq 4\}$

C)  $[-2; 2]$     D)  $[2; +\infty)$     E)  $\mathbb{R} - \langle -2; 2 \rangle$

2. Halle el dominio de la función:  $y = f_{(x)}$ ; tal

$$\text{que } f_{(x)} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{6 - x}$$

A)  $[2; 4]$     B)  $[2; 6]$       C)  $\langle 2; 4 \rangle$

D)  $\langle 2; 6 \rangle$     E)  $[6; \infty)$

3. Halle el rango de la función  $f$  cuya regla es

$$f_{(x)} = \frac{x - 2}{x + 3}$$

A)  $\mathbb{R} - \{1\}$       B)  $\mathbb{R} - \{-1\}$

C)  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$     D)  $\left\langle -\frac{2}{3}; 1 \right\rangle$

E)  $\{ \}$

4. Dada las funciones  $f$  y  $g$  cuyas reglas de correspondencia son

$$f_{(x)} = -3(x - 1)^2 + 6$$

$$g_{(x)} = 2(x - 1)^2 - 3$$

Señale Rang  $f \wedge$  Rang  $g$

A)  $[-2; 6]$       B)  $[-3; 6]$

C)  $[-6; \infty]$     D)  $\langle -\infty; -3 \rangle$     E)

$\langle -3; 6 \rangle$

5. Halle "p" para que el conjunto de pares ordenados de:

$$f = \{(2; 3); (-1; 3); (2; P + 6)\}$$

sea función

A) -5      B) -4

C) -3

- D) 2 E) - 1
6. Señale el dominio de la función f; si

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

- A)  $\langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle \cup \{0\}$   
 B)  $\langle -1; 1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$   
 C)  $\langle -\infty; -1 \rangle \cup [0; 1)$   
 D)  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$   
 E)  $\{ \}$
7. Halle el dominio de  $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$
- A)  $\langle -\infty; -1 \rangle$  B)  $\mathbb{R} - \{0\}$   
 C)  $[-1; 1] - \{0\}$  D)  $\mathbb{R}$  E)  $\mathbb{R} - [-1; 1]$

8. Si  $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2x-1}}$ , halle su dominio.
- A)  $\langle -\infty; \frac{1}{2} \rangle$  B)  $\phi$  C)  $\mathbb{R} - \left[ \frac{1}{2}; 4 \right)$  D)  $\mathbb{R} - \langle 3; +\infty \rangle$  E)  $\mathbb{R}$

9. Si la función parabólica

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax^2 + bx + c\}$$

pasa por los puntos A (1,2);  
 B (-1;12); C (0;4) Calcule (a+b+c)

- A) 1 B) 2 C) 3  
 D) 4 E) 5
10. Señale el valor máximo de la función f, si la regla de correspondencia es:

$$f(x) = -(x-1)^2 - (x-2)^2 - (x-3)^2$$

- A) - 1 B) - 2 C) - 3  
 D) - 4 E) - 5

### TAREA DOMICILIARIA

11. Halle el rango de la función f definida por:

$$f(x) = |2x - 1| - x$$

- A)  $\left[ \frac{1}{2}; +\infty \right)$  B)  $\left[ -\frac{1}{2}; +\infty \right)$   
 C)  $\left\langle -\infty; \frac{1}{2} \right]$  D)  $\left\langle -\infty; -\frac{1}{2} \right]$   
 E)  $\left[ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$

12. Halle la suma de los valores enteros del dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{\sqrt{21} - \sqrt{x^2 - 4}}}$$

- A) 0 B) 1 C) - 1  
 D) 5 E) - 5

13. Si

$$M = \{(2;6); (1;a-b); (1;4); (2;a+b); (3;4)\}$$

es una función, halle:  $a^2 + b^2$

- A) 12 B) 16 C) 32  
 D) 26 E) 27

14. Sea una función definida en el conjunto de los números reales, por

$$f(x) = ax + b \quad \text{y además}$$

$$f(1) = -1 \wedge f(-3) = -13, \text{ hallar:}$$

(3a-2b)

- A) 17 B) 16 C) 15  
 D) 19 E) 23

15. Halle el rango de:  $f(x) = \sqrt{x^2 + 6} - 3$

- A)  $\mathbb{R} - \langle -7; 1 \rangle$  B)  $\mathbb{R}$  C)  $\mathbb{R} - \{0\}$  D)  $\langle -7; 1 \rangle$  E)  $[1; +\infty)$

### SEMANA 10 DE ÁLGEBRA

**LOGARITMO:****Definición**

Se llama logaritmo de un número, en una base dada, positiva y distinta de la unidad, al exponente a que debe elevarse la base para obtener dicho número.

$$\log_b n = x \Rightarrow b^x = n$$

**Propiedades básicas:**

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

$$\log_b b^n = n$$

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b (m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$$

$$\log_b \left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$$

$$\log_b a = \log_{b^x} a^x = \log_{\sqrt[x]{b}} \sqrt[x]{a}$$

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \cdot \log_b a$$

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_b a$$

**Propiedades complementarias**

Cambio de base: de "x" a base "b"

$$n = b^{\log_b n} \quad y \quad n = a^{\log_a n}$$

$$\log_a b^{\log_b n} = \log_a a^{\log_a n}$$

$$\log_b n \cdot \log_a b = \log_a n \cdot \log_a a$$

Cologaritmo:

$$\text{colog}_b n = \log_b \frac{1}{n} = -\log_b n$$

Antilogaritmo:

$$\text{antilog}_b n = b^n$$

Logaritmo Neperiano o Natural:

$$\ln a = \log_e a$$

$$\ln a = n \Rightarrow e^n = a$$

Donde:  $e=2.7182\dots\dots$

**EJEMPLOS**

1. Determine el valor "N", si  
 $\text{Log}_{100} N = 1,5 \text{ Log}_{512} 2^9$

**Solución**

$$\text{Log}_{100} N = \frac{3}{2} \text{ Log}_{512} 512 \Rightarrow \text{Log}_{100} N = \frac{3}{2}$$

$$N = 100^{\frac{3}{2}}$$

$$N = (10^2)^{\frac{3}{2}} = 1\,000$$

2. Halle el valor de  
 $W = \text{Log}_2 \text{Log}_3 \text{antilog}_3 \text{Log}_{1,5} 2,25$

**Solución**

$$w = \text{Log}_2 \text{Log}_3 \text{antilog}_3 \text{Log}_{1,5} (1,5)^2$$

$$w = \text{Log}_2 \text{Log}_3 \text{antilog}_3 2 = 1$$

3. Resolver  $\text{Log}_3^2 x + 2 \text{Log}_3 x = 3$ , e indicar el producto de sus raíces.

**Solución**

$$(\text{Log}_3 x)^2 + 2(\text{Log}_3 x) - 3 = 0$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$(a + 3)(a - 1) = 0$$

$$a = -3 \quad \vee \quad a = 1$$

$$\text{Log}_3 x = -3$$

$$\text{Log}_3 x = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{27} \quad x_2 = 3$$

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{9}$$

4. Resolver la ecuación  
 $\text{Log}_x x^x + \text{Log}_{x^2} x^{x^2} = 24$

**Solución**

$$\text{Como: } \text{Log}_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$$

$$x + \frac{x^2}{2} = 24$$

$$2x + x^2 = 48$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$(x + 8)(x - 6) = 0$$

$$x = -8 \quad \text{ó} \quad x = 6$$

$$x = 6$$

5. Resuelva la ecuación

$$\sqrt{\log x} + \log \sqrt{x} = -\frac{1}{2}$$

**Solución**

$$\log_x a \Rightarrow \sqrt{a} + \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{a} + a = -1$$

$$2\sqrt{a} = -a - 1$$

Elevando al cuadrado

$$4a = a^2 + 2a + 1$$

$$0 = a^2 - 2a + 1$$

$$a = 1 \rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

Incompatible

### TRABAJANDO EN CLASES

1. Indicar el valor de:

$$A = \log_2 \left( \frac{4}{2} \right) + \log_2 \left( \frac{2}{3} \right) + \log_2 \left( \frac{3}{4} \right)$$

- A) -2                      **B) 0**                      C) 2  
D) 3                      E) 5

2. Hallar "X" si:  $\log X = \log m + 3 \log n - 2 \log p$ .

- A)  $\frac{mn}{p}$                       **B)  $\frac{mn^3}{p^2}$**                       C)  $m+3n-2p$   
D)  $mn$                       E) N.A.

3. Hallar "X", si:

$$\log \sqrt[3]{X} - \log 4 = \frac{1}{3}$$

- A) 62                      B) 64                      C) 10  
D) 320                      **E) 640**

4. Hallar:

$$S = {}_4 \log_4 5 \cdot {}_5 \log_5 6 \cdot {}_6 \log_6 7 \cdot {}_7 \log_7 8 \cdot \dots \cdot {}_{99} \log_{99} 100$$

- A) 10                      **B) 100**                      C)  
1000                      D)  $10^{-4}$                       E) 1

5. Hallar el valor de X, en:

$$\log_{X+1} (7X+1) = 2$$

- A) -1                      B) 0                      **C)**  
**5**                      D) 2                      E) 6

6. Hallar el conjunto solución de:

$$X^{2 \cdot \log X} \leq \frac{100}{X^3}$$

- A)  $\langle 1, 10 \rangle$                       B)  $\langle 4, 2 \rangle$                       C)  
 $\langle -2, 2 \rangle$                       D) -2                      **E) N.A**

7. Dada la siguiente ecuación:  $X \log 4 + \log \log 3 = \log \log 81$  El valor de X es:

- A) 2                      B) 3                      C) 4  
D) 5                      **E) 1**

8. Calcular:  $\sqrt{\log X} = \log \sqrt{X}$

- A)  $10^2$                       **B)  $10^4$**                       C) 2  
D) 10                      E) -10

9. Determine el valor "N", si  $\log_{100} N = 1,5 \log_{512} 2^9$

- A) 10                      B) 100                      **C) 1 000**  
D) 2 200                      E) 512

10. Se tiene que:

$$x^2 \left[ \log_a^2 10 + \log_b^2 10 + \log_c^2 10 \right] + 3 = \frac{2x}{\log a} + \frac{2}{\log b}$$

$$\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Si  $abc = 1000$  Halle x.

- A) 3                      B) 4                      C) -3  
**D) 1**                      E) 2

### TAREA DOMICILIARIA

11. La expresión:

$$\text{antilog} \left[ \frac{1}{3} \left( \log a + \frac{1}{2} \log b - 2 \log c \right) \right] \text{ es}$$

igual a:

- A)  $\sqrt{\frac{ab}{c}}$                       B)  $\sqrt{\frac{a\sqrt{b}}{c^2}}$                       C)  $\sqrt[3]{\frac{ab}{2c}}$   
**D)  $\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{b}}{c^2}}$**                       E)  $\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}}$

12. Halle el valor de

$$W = \log_2 \log_3 \text{antilog}_3 \log_{1,5} 2,25$$

- A) 0                      **B) 1**                      C) 2  
D) 1,5                      E) 0,75

13. Resolver  $\log_3^2 x + 2 \log_3 x = 3$ , e indicar el producto de sus raíces.

- A) -4                      B) 9                      **C)  $\frac{1}{9}$**

D) -3                      E) 1

14. Resolver:  $\text{Log}_x (x^x)^{x^x} = (x^2)^{x-2}$ ,

e indicar el valor  $(x^2 - 1)$

A) 15                      B) 8                      **C) 24**  
D) 37                      E) 48

15. Resolver:  $\text{Ln } 12 - \text{Ln}(x - 1) = \text{Ln}(x - 2)$ , e  
indicar su conjunto solución:

A)  $\{5; -2\}$                       B)  $\{-2\}$                       **C)      {5}**

D)  $\{1; 5\}$                       E)  $\{3; -2\}$